

André Filipe de Oliveira Almeida

**Comportamento de Lajes Alveoladas Sujeitas a Cargas
Pontuais – Análise Numérica da Distribuição de Esforços**

Lisboa

2010



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

COMPORTAMENTO DE LAJES ALVEOLADAS SUJEITAS A CARGAS PONTUAIS **ANÁLISE NUMÉRICA DA DISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS**

André Filipe de Oliveira Almeida

(Licenciado em Ciências de Engenharia Civil)

Dissertação para obtenção do Grau de
Mestre em Engenharia Civil – Ramo de Estruturas e Geotecnia
pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa,

Orientador: Professor Doutor Válder J. G. Lúcio

Júri:

Presidente: Doutor Manuel Américo de Jesus Gonçalves da Silva

Vogais: Doutor Válder José da Guia Lúcio

Doutor João Rocha de Almeida

Outubro de 2009

COMPORTAMENTO DE LAJES ALVEOLADAS SUJEITAS A CARGAS PONTUAIS - ANÁLISE NUMÉRICA DA DISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS

André Filipe de Oliveira Almeida

Curso de Mestrado em Engenharia Civil – Ramo de Estruturas e Geotecnia

Orientador: Doutor Válder José da Guia Lúcio

Resumo:

Esta dissertação tem como objectivo aprofundar o conhecimento sobre o comportamento de lajes alveolares sujeitas a cargas concentradas e a forma como o esforço transversal se distribui pelas nervuras. Para o efeito, utilizaram-se modelos numéricos com elementos finitos de sólido para caracterizar as propriedades mecânicas destes elementos.

Conhecendo estas grandezas, modelaram-se painéis de laje alveolar em elementos finitos de laje que foram submetidos a diversas situações de carga, nos quais se fizeram variar as dimensões do vão dos painéis de laje, o número de painéis justapostos e o tipo de painel de laje alveolar.

Com a análise dos resultados destes procedimentos, tiraram-se conclusões quanto à influência da variação de cada um dos parâmetros acima enumerados na distribuição do esforço transversal pelas nervuras, assim como a contribuição da fendilhação longitudinal nas juntas entre painéis e no alvéolo adjacente à secção carregada, na distribuição de esforços. Para concluir, será apresentada uma proposta para calcular o esforço transversal actuante máximo para que, comparando com o esforço transversal resistente, possa ser verificada a segurança das lajes alveolares ao punção.

Palavras-chave: laje alveolar, carga concentrada, punção, esforço transversal, corte, torção, elementos finitos.

BEHAVIOUR OF HOLLOW CORE SLABS SUBJECTED TO CONCENTRATED LOADS – NUMERICAL ANALYSIS OF STRESS DISTRIBUTION

André Filipe de Oliveira Almeida

MSc in Civil Engineering – Structures and Geotechnics

Supervisor: Doutor Válder José da Guia Lúcio

Abstract:

It is the purpose of this dissertation to explain the behavior of hollow core slabs subjected to concentrated loads and the way shear stress is distributed throughout the webs of the hollow core slabs.

In order to demonstrate this, solid finite element numerical models have been made in order to characterize the mechanical properties of these same elements.

Having defined this, various loads were applied to panels of hollow core slabs, modeled into frame finite element models of variable size, type and number of juxtaposed elements.

As a result of these analyses a number of conclusions have been asserted regarding the influence of each of the above mentioned parameters on web shear stress distribution, as well as the influence of longitudinal cracking in the joints between panels and in the void adjacent to the loaded section, on stress distribution.

Finally, a proposal is presented regarding the calculation of the maximum acting shear stress, as opposed to the resisting shear stress, so that the safety of the hollow core slabs can be verified with regard to punching.

Keywords: hollow core slab, concentrated load, punching, shear stress, shear, torsion finite element.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de deixar um bem-haja a todos os que de alguma forma contribuíram e tornaram possível a concretização deste trabalho de investigação

À minha família, principalmente pai Diamantino, mãe Noémia, irmã Inês e avô José de Oliveira. Pelo incansável apoio, compreensão e ajuda.

Ao Professor Válder Lúcio, orientador científico, pela disponibilidade, ajuda, e boa disposição.

Aos engenheiros Rui Marreiros, Carla Marchão e Ana Rita, professores, colegas e amigos. Por todo o apoio, incentivo e conselhos.

Aos Professores Carlos Chastre Rodrigues, António Pinho Ramos, Luis Neves e João Rocha de Almeida, pelas críticas construtivas, ajuda na resolução de problemas e sugestões.

Ao amigo Sebastião Perestrello pela ajuda e incentivo.

Aos amigos e colegas Tiago Vilarinho e André Ramos por tudo o que contribuíram com conhecimento, tempo e trabalho para esta dissertação.

Ao amigo Carlos Carmo por todo o apoio e ajuda na fase final deste trabalho.

Aos amigos de longa data que apesar deste tempo de menor convívio, nunca deixaram de estar presentes.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1.....	1
Introdução	1
1.1 Processo de concepção e características gerais.....	2
1.2 Aplicação em obra	4
1.3 Objectivos	4
1.4 Organização da dissertação.....	4
 CAPÍTULO 2.....	 7
Estado da Arte	7
2.1 Lajes alveoladas sujeitas a punçoamento.....	7
2.2 Actividade de investigação	8
2.2.1 Aswald e Jacques	8
2.2.2 Yang, Lin.....	9
2.2.3 Pajari, Matti.....	13
2.2.4 Micallef, P.	19
2.2.5 Martins, Sílvia	20
2.2.6 EN1168:2005	25
2.2.7 EN1168:2005+A1:2008	27
 CAPÍTULO 3.....	 31
Caracterização Mecânica das Lajes Alveolares	31
3.1 Dedução da equação governativa	31
3.2 Modelo simplificado.....	38
3.3 Determinação da rigidez de flexão	42
3.3.1 Determinação da rigidez de flexão segundo x	44
3.3.2 Determinação da rigidez de flexão segundo y	51
3.4 Determinação da rigidez de corte	57
3.4.1 Determinação da rigidez de corte segundo x	59
3.4.2 Determinação da rigidez de corte segundo y	63

3.5	Determinação da rigidez de torção	66
3.6	Caracterização expedita.....	69
3.6.1	Determinação expedita da rigidez de flexão segundo x	69
3.6.2	Determinação expedita da rigidez de flexão segundo y	70
3.6.3	Determinação expedita da rigidez de corte segundo x	70
3.6.4	Determinação expedita da rigidez de corte segundo y	71
3.6.5	Determinação expedita da rigidez de torção	84
3.7	Factores de redução mecânica	85
CAPÍTULO 4		87
Modelação dos elementos HCS.....		87
4.1	Modelo simplificado de Elementos de Laje	87
4.2	Modelos de Elementos de Laje e Barra	90
4.3	Características dos ensaios	91
CAPÍTULO 5		97
Análise dos Resultados.....		97
5.1	Deformada	97
5.2	Distribuição global de esforços sem fendilhação nas juntas	99
5.3	Influência da fendilhação das juntas.....	102
5.4	Análise qualitativa da distribuição do esforço transversal nas nervuras	106
5.5	Posição do ponto de tensão máxima.....	111
5.6	Tratamento dos resultados	112
5.7	Análise gráfica das diversas variáveis	114
5.7.1	Análise dos modelos HCS20	115
5.7.2	Comparação entre os elementos HCS20 e HCS50	119
5.8	Interacção corte/torção	121
5.9	Propostas para cálculo do esforço transversal actuante.....	134
CAPÍTULO 6		139
Conclusões		139
6.1	Características mecânicas e sua influência.....	139

6.2	Características geométricas e posição da carga	140
6.3	Interacção corte/torsão	141
6.4	Proposta de cálculo do Esforço Transverso actuante.....	142
6.5	Propostas para desenvolvimentos futuros.....	142
Referências bibliográficas		143
Anexo 1		A1-1

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 – Mecanismo móvel com moldes dos alvéolos.....	2
Figura 1.2 – Sistema de pré-esforço.....	3
Figura 1.3 – Armazenamento de lajes alveolares.....	3
Figura 2.1 – Abordagem de Yang [9] quanto à transferência da força de pré-esforço para o betão	10
Figura 2.2 – Posição do ponto crítico junto ao apoio segundo Yang [9]	12
Figura 2.3 – Modelo de ensaio utilizado por Pajari [2].....	14
Figura 2.4 – Relação entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens.....	15
Figura 2.5 – Lajes de 200mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica ...	16
Figura 2.6 – Lajes de 265mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica. ...	16
Figura 2.7 – Lajes de 320mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica. ...	16
Figura 2.8 – Lajes de 370mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica ...	17
Figura 2.9 – Lajes de 400mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica. ...	17
Figura 2.10 – Lajes de 500mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica. ...	17
Figura 2.11 – Posição da zona crítica ao longo da altura da nervura.	18
Figura 2.12 – Lajes de 265mm. Método de Yang [9]. Valor característico do esforço transversal resistente determinado a diferentes alturas da nervura.	18
Figura 2.13 – Lajes de 400mm. Método de Yang [9]. Valor característico do esforço transversal resistente determinado a diferentes alturas da nervura.	19
Figura 2.14 – Gráfico de Esforço Transverso-Deslocamento. Micallef [3].	20
Figura 2.15 – Esquema de ensaio utilizado por Martins [4].	21

Figura 2.16 – Esquema do modelo de ensaio com quatro painéis em planta utilizado por Martins [4].	21
Figura 2.17 – Vistas em corte do modelo de ensaio com quatro painéis utilizado por Martins [4].	22
Figura 2.18 – Posição esquemática dos deflectómetros do modelo de ensaio com quatro painéis utilizado por Martins [4].	22
Figura 2.19 – Carga no 2º painel. Deformada segundo a direcção transversal. Martins [4].	24
Figura 2.20 – Carga no 3º painel. Deformada segundo a direcção transversal. Martins [4].	24
Figura 2.21 – Carga no 4º painel. Deformada segundo a direcção transversal. Martins [4].	25
Figura 2.22 – Largura efectiva das nervuras. EN1168:2005 [8].	26
Figura 2.23 – Laje alveolar com alvéolo betonado. EN1168:2005 [8].	27
Figura 2.24 – Esquema explicativo das grandezas envolvidas no cálculo do esforço transversal resistente.	28
Figura 3.1 – Painel genérico de HCS.	31
Figura 3.2 – Elemento infinitesimal do painel genérico de HCS.	32
Figura 3.3 – Forças actuantes no elemento infinitesimal do painel genérico de HCS.	32
Figura 3.4 – Esquema da deformada do painel de laje em flexão.	34
Figura 3.5 – Deslocamentos infinitesimais resultantes da deformada.	34
Figura 3.6 – Laje de 0,2m de espessura. (a) Secção longitudinal original; (b) Secção longitudinal simplificada; (c) Secção Transversal simplificada.	39
Figura 3.7 – Laje de 0,5m de espessura. (a) Secção longitudinal original; (b) Secção longitudinal simplificada; (c) Secção Transversal simplificada.	40
Figura 3.8 – Modelos em elementos de sólido utilizados na modelação. (a) HCS20; (b) HCS50.	41
Figura 3.9 – Esquema estrutural e de forças utilizado na caracterização do elemento HCS.	42
Figura 3.10 – Diagrama de momento flector resultante do sistema utilizado.	42
Figura 3.11 – Formulação geométrica para o cálculo do raio de curvatura.	43
Figura 3.12 – Flexão segundo x. Sistema de apoios.	45
Figura 3.13 – Disposição das barras de MR no modelo.	46
Figura 3.14 – Flexão segundo x. Momentos aplicados no modelo.	47
Figura 3.15 – Flexão segundo x. Deformada resultante da análise do modelo.	48
Figura 3.16 – Flexão segundo x. Deformada em corte para leitura dos pontos notáveis	49

Figura 3.17 – Flexão segundo y. Sistema global de apoios.....	52
Figura 3.18 – Flexão segundo y. Momentos aplicados no modelo.	53
Figura 3.19 – Flexão segundo y. Deformada resultante da análise do modelo.	54
Figura 3.20 – Flexão segundo y. Deformada em corte para leitura dos pontos notáveis	55
Figura 3.21 – Corte segundo x. (a) Modelo de ensaio, (b) Diagrama de esforço transversor; (c) Diagrama de momento flector; (d) Deformada.....	58
Figura 3.22 – Corte segundo x. Sistema de apoios.	60
Figura 3.23 – Corte segundo x. Deformada resultante da análise do modelo.	61
Figura 3.24 – Corte segundo x. Deformada em corte para leitura dos pontos notáveis	61
Figura 3.25 – Corte segundo y. Sistema de apoios.....	63
Figura 3.26 – Corte segundo y. Deformada resultante da análise do modelo.	64
Figura 3.27 – Corte segundo y. Deformada em corte para leitura dos pontos notáveis	64
Figura 3.28 – Fracção de painel de HCS.....	72
Figura 3.29 – Sistema aproximado de um alvéolo sujeito ao corte.....	72
Figura 3.30 – Diagrama de momentos flectores no alvéolo devidos à força de corte aplicada.....	73
Figura 3.31 – Deformada do alvéolo resultante da força de corte aplicada.	73
Figura 3.32 – Simplificação por simetria do sistema da Figura 3.29.	74
Figura 3.33 – Diagrama de momentos flectores resultantes do sistema simplificado.....	74
Figura 3.34 – Deformada resultante do modelo simplificado.	74
Figura 3.35 – Geometria do nó.....	75
Figura 3.36 – Geometria efectiva do nó.	76
Figura 3.37 – Esforços actuantes na geometria efectiva do nó.	77
Figura 3.38 – Elementos constituintes do elemento HCS simplificado (a) Elementos de extremidade; (b) Elementos intermédios.....	79
Figura 3.39 – Elementos constituintes do elemento HCS simplificado (a) Elementos de extremidade; (b) Elementos intermédios.....	80
Figura 3.40 – Aplicação do método dos deslocamentos ao sistema da Figura 4,8(a) após simplificação por simetria.	81
Figura 3.41 – Evolução do parâmetro de correcção C.	84
Figura 4.1 – Esquema do sistema de ensaio preliminar.	88

Figura 4.2 – Comparação entre Laje Maciça e HCS20. Distribuição de V_y [N/m]; Carga 10kN.	88
Figura 4.3 – Comparação entre Laje Maciça e HCS20. Distribuição de V_x [N/m]; Carga 10kN.	89
Figura 4.4 – Comparação entre HCS20 e HCS50. Distribuição de V_y [N/m]; Carga 10kN	89
Figura 4.5 – Comparação entre HCS20 e HCS50. Distribuição de V_x [N/m]; Carga 10kN	90
Figura 4.6 – Comparação entre modelos com elementos de laje e modelos mistos com elementos de laje e barra. Distribuição de V_y [N/m]; Carga 10kN.....	91
Figura 4.7 – Comparação entre modelos com elementos de laje e modelos mistos com elementos de laje e barra. Distribuição de M_{xy} [N.m/m]; Carga 10kN.....	91
Figura 4.8 – Esquema do modelo definitivo.....	92
Figura 4.9 – Esquema de junta não fendilhada entre painéis.....	93
Figura 4.10 – Esquema de junta fendilhada entre painéis.	93
Figura 4.11 – Nomenclatura e posicionamento das cargas utilizadas.	94
Figura 4.12 – Exemplo explicativo do modelo utilizado para o carregamento de bordo. ...	95
Figura 4.13 – Nomenclatura e posicionamento das cargas de bordo utilizadas.	95
Figura 5.2 – Deformada resultante da solicitação de três painéis de HCS20 justapostos com as juntas fendilhadas, sujeito a carga concentrada a meio vão na nervura central.	97
Figura 5.2 – Deformada resultante da solicitação de três painéis de HCS20 justapostos com as juntas fendilhadas, sujeito a carga concentrada a meio vão na nervura periférica.	98
Figura 5.3 – Deformada resultante da solicitação de três painéis de HCS20 justapostos com as juntas fendilhadas, sujeito a carga concentrada a meio vão na junta entre painéis.	98
Figura 5.4 – Distribuição de momentos flectores segundo x [N.m/m]. Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.	99
Figura 5.5 – Distribuição de momentos flectores segundo y [N.m/m]. Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.	100
Figura 5.6 – Distribuição de momentos torsões [N.m/m]. Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.....	100
Figura 5.7 – Distribuição de esforço transversal segundo x [N/m]. Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.....	101
Figura 5.8 – Distribuição de esforço transversal segundo y [N/m]. Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.....	102

Figura 5.9 – Distribuição de momentos flectores segundo y [N.m/m]. Carga a meio vão sobre a nervura de bordo; Carga 10kN.....	103
Figura 5.10 – Distribuição de momentos torsores [N.m/m]. Carga a meio vão sobre a nervura central.....	103
Figura 5.11 – Distribuição de momentos torsores [N.m/m]. Carga a 1/8 de vão sobre a nervura central.....	104
Figura 5.12 – Distribuição de momentos torsores [N.m/m]. Carga a meio vão sobre a nervura de bordo.	104
Figura 5.13 – Distribuição de momentos torsores [N.m/m]. Carga a 1/8 de vão sobre a nervura de bordo.....	105
Figura 5.14 – Distribuição de esforço transversal segundo y [N/m]. Carga a meio vão sobre a nervura central.	105
Figura 5.15 – Distribuição de esforço transversal segundo y [N/m]. Carga a meio vão sobre a nervura de bordo.....	106
Figura 5.16 – Distribuição de esforço transversal segundo y [N/m]. Carga a 1/8 de vão sobre a nervura de bordo.	106
Figura 5.17 – Distribuição de esforço transversal pelas nervuras. Carga a meio vão sobre a nervura central. Juntas não fendilhadas.	107
Figura 5.18 – Distribuição de esforço transversal pelas nervuras. Carga a meio vão sobre a nervura central. Juntas fendilhadas.	108
Figura 5.19 – Distribuição de esforço transversal pelas nervuras. Carga a 1/4 de vão sobre a nervura central. Juntas não fendilhadas.	108
Figura 5.20 – Distribuição de esforço transversal pelas nervuras. Carga a 1/4 de vão sobre a nervura central. Juntas fendilhadas.	108
Figura 5.21 – Distribuição de esforço transversal pelas nervuras. Carga a 1/8 de vão sobre a nervura central. Juntas não fendilhadas.	109
Figura 5.22 – Distribuição de esforço transversal pelas nervuras. Carga a 1/8 de vão sobre a nervura central. Juntas fendilhadas.	109
Figura 5.23 – Distribuição de esforço transversal pelas nervuras. Carga a meio vão sobre a nervura de bordo. Juntas não fendilhadas.	110
Figura 5.24 – Distribuição de esforço transversal pelas nervuras. Carga a meio vão sobre a nervura de bordo. Juntas fendilhadas.	110

Figura 5.25 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras. Carga a 1/4 de vão sobre a nervura de bordo. Juntas não fendilhadas.	111
Figura 5.26 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras. Carga a 1/4 de vão sobre a nervura de bordo. Juntas fendilhadas.	111
Figura 5.27 – Distribuição das tensões de corte pela nervura sujeita a carga pontual a meio vão.	112
Figura 5.28 – Esquema da metodologia usada para dedução da equação.	113
Figura 5.29 – Estudo de convergência de resultados para refinamento da malha.	113
Figura 5.30 – Esquema explicativo da análise dos modelos.	115
Figura 5.31 – Carga na nervura central e de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas não fendilhadas. Largura da laje $b=6h$	116
Figura 5.32 – Carga na nervura central e de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas não fendilhadas para diferentes larguras de painel de laje.....	117
Figura 5.33 – Carga na nervura central e de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas não fendilhadas. Largura da laje $b=18h$	117
Figura 5.34 – Carga na nervura central e de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas fendilhadas. Largura da laje $b=18h$	118
Figura 5.35 – Carga sobre a junta fendilhada e na nervura de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas fendilhadas. Largura da laje $b=18h$	118
Figura 5.36 – Tipos de rotura devido ao punçoamento.	119
Figura 5.37 – Comparação entre HCS20 e HCS50. Carga na nervura central. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas fendilhadas. Largura da laje $b=3,6m$	120
Figura 5.38 – Comparação entre HCS20 e HCS50. Carga na nervura de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas fendilhadas. Largura da laje $b=3,6m$	120

Figura 5.39 – Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada. Carga a meio vão na nervura central.	121
Figura 5.40 – Esquema da posição dos pontos de aplicação da carga.	121
Figura 5.41 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos a) e para um vão de 4,8m.	122
Figura 5.42 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos b) e para um vão de 4,8m.	123
Figura 5.43 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos c) e para um vão de 4,8m.	124
Figura 5.44 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos d) e para um vão de 4,8m.	125
Figura 5.45 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos a) e para um vão de 13,2m.	126
Figura 5.46 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos b) e para um vão de 13,2m.	127
Figura 5.47 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos c) e para um vão de 13,2m.	128
Figura 5.48 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos c) e para um vão de 13,2m.	129
Figura 5.49 – Laje HCS50. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos a) e para um vão de 4,8m.	130
Figura 5.50 – Laje HCS50. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos d) e para um vão de 4,8m.	131
Figura 5.51 – Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na importância da interacção corte/torção relativamente ao punçoamento para vãos de 4,8m.	132
Figura 5.52 – Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na importância da interacção corte/torção relativamente ao punçoamento para vãos de 13,2m.	132
Figura 5.53 – Comparação entre o valor do esforço transversal na secção adjacente à carga e no apoio. Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na variação do esforço transversal em função do ponto de aplicação da carga para vãos de 4,8m.	133

Figura 5.54 – Comparação entre o valor do esforço transverso na secção adjacente à carga e no apoio. Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga para vãos de 13,2m.	133
Figura 5.55 – Comparação entre o valor do esforço transverso no apoio para vãos de 4,8m e 13,2m. Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga.....	134
Figura 5.56 – Proposta de cálculo da percentagem de Esforço Transverso actuante na zona de acção da carga na nervura solicitada. HCS20; L=4.8m.	135
Figura 5.57 – Proposta de cálculo da percentagem de Esforço Transverso actuante na zona de acção da carga na nervura solicitada. HCS50; L=4.8m.	135
Figura 5.58– Proposta de cálculo da percentagem de Esforço Transverso actuante na zona do apoio na nervura solicitada. HCS20; L=4.8m.	135
Figura 5.59 – Proposta de cálculo da percentagem de Esforço Transverso actuante na zona do apoio na nervura solicitada. HCS50; L=4.8m.	135

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 – Síntese dos resultados obtidos para os painéis isolados.	9
Tabela 2.2 – Síntese dos resultados obtidos para os painéis justapostos	9
Tabela 2.3 – Síntese dos resultados obtidos para os painéis isolados também sujeitos a carga de serviço.	9
Tabela 2.4 – Metodologia de ensaio [4].	22
Tabela 2.5 – Síntese dos resultados das fases 1-4 [4].	23
Tabela 3.1 – Deslocamentos verticais dos pontos notáveis da deformada por flexão segundo x.	49
Tabela 3.2 – Deslocamentos verticais dos pontos notáveis da deformada por flexão segundo y.	55
Tabela 3.3 – Deslocamentos verticais dos pontos notáveis da deformada por corte segundo x.	61
Tabela 3.4 – Deslocamentos verticais dos pontos notáveis da deformada por corte segundo y.	65
Tabela 3.5 – Reacções nos apoios encastrados para flexão segundo x.	67
Tabela 3.6 – Reacções nos apoios encastrados para flexão segundo y.	67
Tabela 3.7 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de flexão segundo x	69
Tabela 3.8 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de flexão segundo y	70
Tabela 3.9 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de corte segundo x	71
Tabela 3.10 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de corte segundo y	83
Tabela 3.11 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de torção.	85
Tabela 3.12 – Factores de redução da laje de $h=0,2$	86
Tabela 3.13 – Factores de redução da laje de $h=0,5$	86
Tabela 4.1 – Nomenclatura e posicionamento das cargas utilizadas.	94
Tabela 5.1 – Aplicação do algoritmo de refinamento.	114
Tabela 5.2 – HCS20 com vão de 4,8m. Fracção máxima de esforço transversal para cada caso na zona de aplicação da carga e no apoio.	124
Tabela 5.3 – HCS20 com vão de 13,2m. Fracção máxima de esforço transversal para cada caso na zona de aplicação da carga e no apoio.	129

Tabela 5.4 – HCS50 com vão de 4,8m. Fracção máxima de esforço transversal para cada caso na zona de aplicação da carga e no apoio.	131
---	-----

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A construção pré-fabricada, teve o seu expoente máximo em Portugal a partir da segunda metade da década de 70, quando, no pós 25 de Abril, foi necessário garantir habitação a todos os deslocados que chegavam ao nosso país a uma velocidade muito superior ao ritmo da construção.

Face a esta exigência, optou-se pela edificação de estruturas com elementos pré-fabricados, o que reduziu significativamente o tempo de construção.

Apesar de a qualidade ser em geral boa, este tipo de solução era desagradável do ponto de vista arquitectónico, o que fez com que caísse em desuso. Contudo, analisando os factos, conclui-se que a falta de estética não se deve à natureza dos materiais aplicados, mas sim à falta de tempo e verbas, fruto das mudanças sociais da época. Não havia qualquer tipo de trabalho arquitectónico nos projectos que eram totalmente feitos por engenheiros, sendo o resultado, um conjunto de “caixotes”.

A percepção desta realidade levou ao ressurgimento da pré-fabricação como opção apelativa, dadas as suas vantagens claras ao nível do prazo de construção, recursos e, deste modo, custo da construção. O seu comportamento perante cargas concentradas, contudo, é ainda desconhecido pela comunidade científica, justificando novos trabalhos de investigação que possibilitem um melhor conhecimento destas estruturas, como forma de melhorar o seu comportamento e aumentar a sua segurança.

Esta dissertação pretende contribuir para uma melhor compreensão deste tipo de estruturas, debruçando-se especificamente sobre o comportamento de lajes alveolares sujeitas a cargas concentradas.

As lajes alveolares consistem em duas lâminas de betão ligadas entre si por nervuras, pré-esforçadas segundo uma direcção.

Estes elementos são apelativos pela velocidade e facilidade de aplicação em obra, assim como a ligeireza que atribuem à estrutura pelo facto de não serem maciças. Esta é contudo a propriedade que confere a estes elementos um comportamento peculiar.

1.1 PROCESSO DE CONCEPÇÃO E CARACTERÍSTICAS GERAIS

As lajes alveolares ou HCS (Hollow Core Slabs) são elementos pré-fabricados de betão pré-tensionados.

O processo de fabrico consiste na betonagem contínua ao longo de uma pista com aproximadamente uma centena de metros e com 1,2m de largura, onde foram previamente colocadas e tensionadas as armaduras de pré-esforço.

A betonagem é feita por um mecanismo móvel no caso da pista de betonagem ser fixa, como mostra a Figura 1.1, ou alternativamente, a pista desloca-se sob um mecanismo de betonagem que se encontra fixo. Este mecanismo de betonagem tem acoplados os moldes que dão forma aos alvéolos.



Figura 1.1 – Mecanismo móvel com moldes dos alvéolos.

Para armadura de pré-esforço utilizam-se fios de diâmetros entre 5mm e 8mm ou cordões de aço de alta resistência. O processo de tensionamento consiste na amarração dos fios ou cordões numa das extremidades da pista de betonagem e posterior tensionamento na extremidade oposta (Figura 1.2).



Figura 1.2 – Sistema de pré-esforço.

O betão utilizado é de grande qualidade, sendo em geral utilizada a classe de resistência igual ou superior a C40/50.

Aquando da betonagem, o betão é vibrado e compactado, ganhando a forma dos moldes que conferem a geometria final à laje.

A cura do betão pode ser feita ao vapor ou recorrendo a membranas impermeáveis.

Quando o betão ganha resistência suficiente, o pré-esforço é libertado e os painéis de laje são cortados de acordo com o vão pretendido por meio de uma serra de disco diamantado e posteriormente armazenadas como mostra a Figura 1.3.



Figura 1.3 – Armazenamento de lajes alveolares.

Constata-se, assim, que a única armadura existente nestes elementos é a armadura de pré-esforço, sendo inexistente qualquer armadura de flexão no sentido perpendicular ao vão ou armadura para resistir ao esforço transverso.

1.2 APLICAÇÃO EM OBRA

Em aplicações práticas, estes elementos são utilizados simplesmente apoiados segundo a direcção das nervuras, dispostos lado a lado. Pode também ser conferida continuidade entre vãos contínuos, através de armaduras para momentos negativos colocada na camada de betão complementar com espessura de 5cm a 10cm usada para solidarizar os painéis de laje alveolar.

Este apoio dos elementos pré-fabricados pode ser em vigas pré-fabricadas, em vigas betonadas “in situ” ou sobre vigas metálicas.

É usual rasgar superiormente a extremidade de alguns alvéolos junto à zona do apoio, para colocar armadura e betonar posteriormente, de forma a melhorar a resistência ao esforço transverso e a ligação ao apoio. As juntas entre os painéis justapostos devem também ser seladas com betão para garantir a transmissão de forças transversais entre painéis.

Casos de cargas concentradas surgem em situações tão diversas como aberturas na laje, onde se interrompem alguns painéis longitudinalmente, sendo estes apoiados num perfil metálico apoiado nos bordos dos painéis laterais ou apoios de máquinas em edifícios industriais.

1.3 OBJECTIVOS

O comportamento destes elementos quando sujeitos a cargas pontuais é ainda pouco conhecido pela comunidade científica. O objectivo deste trabalho de investigação é a compreensão dos fenómenos que condicionam a distribuição de esforços para as referidas solicitações e analisar os esforços de corte nas nervuras.

Para tal, recorrer-se-á a um programa de cálculo automático para caracterizar e estudar o comportamento citado, fazendo variar vários factores para estudar a sua importância nos fenómenos em estudo.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho foi organizado da forma que se descreve de seguida.

No capítulo um, introduz-se o tema da dissertação, apresentando o enquadramento histórico, uma breve descrição do elemento laje alveolar e os principais aspectos do seu processo de fabricação. Por fim, apresentam-se as motivações que levaram a trabalhar este tema e faz-se uma breve descrição dos objectivos e organização do trabalho. No capítulo dois, procede-se à exposição do estado actual do conhecimento, sintetizando estudos efectuados neste âmbito, incluindo a pré-norma europeia actualmente em vigor, e recentes estudos experimentais e teóricos. No capítulo três, verifica-se a validade da aplicação da equação governativa das lajes ortotrópicas ao caso em estudo, processo essencial para os desenvolvimentos seguintes. De seguida faz-se a caracterização mecânica do elemento recorrendo a um programa de cálculo automático aliado a alguns métodos de cálculo para que, sabendo as diferentes rigidezes e as suas relações, se possam compreender os factores que influenciam o comportamento das lajes alveolares. Torna-se possível, além disso, a modelação para as restantes simulações. Finalmente são propostos métodos para calcular as características mecânicas do elemento de forma expedita, sem recurso a qualquer programa de cálculo estrutural. No capítulo quatro é explicada toda a metodologia usada para chegar aos modelos finais usados para as simulações, partindo das rigidezes calculadas anteriormente. No quinto capítulo, são apresentados os resultados das simulações, sendo igualmente feitas comparações entre eles para uma melhor percepção da influência de cada um dos factores estudados. Finalmente, no sexto capítulo, tecem-se as conclusões finais da investigação, das quais resultam propostas e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

ESTADO DA ARTE

Far-se-á neste capítulo o enquadramento do problema do comportamento e distribuição de cargas em lajes alveolares sujeitas a forças concentradas, citando estudos efectuados e especificações apresentadas e normas.

2.1 LAJES ALVEOLADAS SUJEITAS A PUNÇOAMENTO

Sendo, efectivamente, um problema de esforço transversal, como consequência da aplicação de cargas concentradas, na literatura é feita frequentemente a analogia com o termo “punçoamento” quando se pretende caracterizar este fenómeno.

O problema do dimensionamento de lajes alveolares ao punçoamento deriva de um grande número de factores, difíceis de quantificar, uma vez que as variáveis presentes são dependentes de parâmetros como a qualidade do betão usado no preenchimento das juntas entre painéis como a própria geometria da laje, o valor do pré-esforço e posição transversal e longitudinal da carga.

O facto de uma laje alveolar ser formada por painéis individuais justapostos influencia fortemente o desempenho da mesma, pois a qualidade da betonagem das juntas vai determinar a dissipação de cargas de um painel para o vizinho.

A distribuição de tensões é também função da relação entre as geometrias das secções das direcções longitudinal e transversal.

Outro aspecto determinante é a inexistência de armadura de flexão transversal, o que faz com que, os momentos transversais devido a uma carga concentrada possam ser suficientes para provocar uma fenda longitudinal que impede a transmissão de cargas entre as duas partes do painel fendido, sobrecarregando a nervura solicitada.

2.2 ACTIVIDADE DE INVESTIGAÇÃO

Os trabalhos de investigação existentes sobre o tema em questão são muito escassos e, devido à grande quantidade de variáveis envolvidas, pouco profundos. Estes estudos centram-se quase exclusivamente no ponto de vista da resistência e não na acção, o que torna ainda mais complicada a comparação de resultados.

2.2.1 Aswald e Jacques

Aswald e Jaques [1] estudaram experimentalmente o efeito da interacção corte/torção, efeito este determinante na situação de punçoamento no bordo de um painel de laje. Para isso foram ensaiados 25 painéis de laje com espessura de 0,203m e largura de 1,22m.

Os trabalhos foram divididos em 3 séries.

Na primeira, foram ensaiados 10 painéis isolados, simplesmente apoiados em vigas de betão, distanciadas entre si de 8,15m a 8,81m, variando a posição da carga longitudinalmente entre 0,15L e 0,5L, sendo L o vão livre entre apoios. A tensão média de resistência à compressão do betão utilizado nas lajes foi de 58,6MPa e o pré-esforço composto por 5 cordões de aço de baixa relaxação com 12,7mm de diâmetro, pré-tensionados a 70% da resistência à tracção, posicionados na base das nervuras.

Desta primeira fase de ensaios os autores concluíram que para carregamentos próximos do meio vão a rotura se dá por punçoamento, enquanto, à medida que a posição da carga se aproxima do apoio, a tendência é para que ocorra uma rotura por interacção corte/torção junto ao apoio. O valor médio das cargas de rotura foi, respectivamente, 64,3kN e 58,7kN.

Na segunda série de ensaios, foi usado o mesmo sistema de ensaio mas, desta vez, ensaiaram-se 2 painéis isolados e dois conjuntos de dois painéis com a junta entre eles preenchida com betão. A tensão média de resistência à compressão do betão foi de 59,0MPa, mantendo-se o pré-esforço supracitado.

O posicionamento da carga no bordo variou entre 0,18L e 0,5L, em que L é o vão da laje. Nalguns ensaios foi simulada uma carga distribuída, recorrendo a blocos de betão cujo valor máximo foi de $2,59\text{N/m}^2$, não sendo no entanto especificado o valor quando este não correspondia ao valor mais elevado.

Para os painéis isolados obtiveram-se os seguintes resultados:

Tabela 2.1 – Síntese dos resultados obtidos para os painéis isolados.

Posição da carga	Carga de serv. [kN/m ²]	Carga de rotura [kN]	Tipo de rotura
0,18L	2,59	55,6	Corte-Torção
0,33L	2,59	54,5	Punçoamento
0,25L	0	46,5	Corte-Torção
0,50L	0	51,2	Punçoamento

Para os painéis justapostos obtiveram-se os seguintes resultados:

Tabela 2.2 – Síntese dos resultados obtidos para os painéis justapostos

Posição da carga	Carga de serv. [kN/m ²]	Carga de rotura [kN]	Tipo de rotura
0,25L	<2,59	64,5	Corte-Torção
0,50L	2,59	56,7	Punçoamento
0,50L	<2,59	70,3	Punçoamento

Na terceira série, ensaiaram-se painéis isolados conforme o procedimento descrito para a segunda série mas desta vez, todos sujeitos à carga distribuída máxima referida. A tensão média de resistência à compressão do betão foi de 63,5MPa mantendo-se mais uma vez o pré-esforço inalterado.

Desta série de ensaios obtiveram-se os seguintes resultados

Tabela 2.3 – Síntese dos resultados obtidos para os painéis isolados também sujeitos a carga de serviço.

Posição da carga	Carga de serv. [kN/m ²]	Carga de rotura [kN]	Tipo de rotura
0,23L a 0,25L	2,59	66	Punçoamento
0,18L	2,59	64,5	Corte-Torção
0,18L	2,59	77,9	Punçoamento
0,50L	2,59	-	Não atingida

Os autores concluíram que para cargas posicionadas entre 0,15L e 0,25L, a rotura dá-se por interacção corte-torção enquanto que, para cargas posicionadas entre 0,33L e 0,5L, a rotura prevê-se por punçoamento.

2.2.2 Yang, Lin

Lin Yang apresenta a sua proposta de determinação da capacidade resistente de uma laje alveolar ao esforço transversal, considerando as forças de corte provenientes da transferência da força de pré-esforço dos fios para o betão.

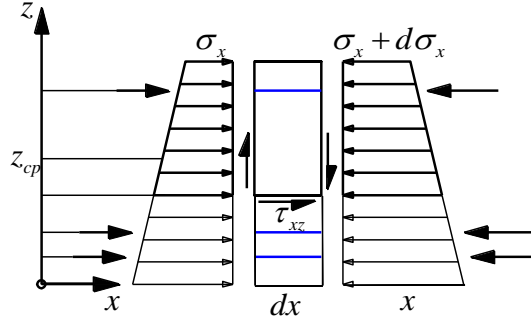


Figura 2.1 – Abordagem de Yang [9] quanto à transferência da força de pré-esforço para o betão.

O autor começa por descrever os mecanismos de rotura por esforço transversal passíveis de ocorrer numa laje alveolar, que são, respectivamente:

- Falha na ancoragem dos fios de pré-esforço;
- Rotura de esforço transversal provocadas por flexão;
- Rotura por esforço transversal devido a tracções na alma da nervura;
- Rotura por esforço transversal devido a compressões na alma da nervura.

Destes mecanismos de rotura, Yang centra-se no terceiro, que é na sua opinião o que apresenta maiores probabilidades de ocorrer. A rotura por compressão na alma acontece quando a tensão de resistência à compressão do betão é excedida; no entanto, esta tensão nunca é atingida uma vez que as lajes alveolares não têm armadura de esforço transversal e, por isso, a tensão de resistência à tracção é atingida antes da anterior.

O autor sugere uma nova abordagem no cálculo do esforço transversal resistente, no qual considera as tensões normais e de corte da forma:

$$\sigma_x = -\frac{N_p(x_{cp})}{A} - \frac{M_y(x_{cp}) - N_p(x_{cp})e}{I_y} z_{cp} \approx -\frac{N_p}{A} + \frac{N_p}{I_y} ez - \frac{V_z}{I_y} x_{cp} z \quad (2.1)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{b(z_{cp})} \int_{A_{cp}} \frac{d\sigma}{dx} dA = \frac{1}{b} \int_{A_{cp}} \left[\frac{1}{A} \frac{dN_p}{dx} - \frac{ez}{I_y} \frac{dN_p}{dx} + \frac{z}{I_y} \frac{dM_y}{dx} \right] dA \quad (2.2)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{b} \left[\left(\frac{A_{cp}}{A} - \frac{S_{cp}e}{I_y} \right) \frac{dN_p}{dx} + \frac{S_{cp}}{I_y} V_z \right] \quad (2.3)$$

onde

I_y é o momento de inércia da nervura

b representa a espessura da nervura a uma altura no ponto considerado

N_p é a força de pré-esforço

z_{cp}	é a distância entre o centro de massa da nervura e o ponto crítico
S_{cp}	é o momento estático da parcela de nervura acima da posição z_{cp}
x_{cp}	é a distância no sentido longitudinal da nervura a que o ponto de rotura se encontra a partir do centro do apoio
A	define a área total da secção da nervura
A_{cp}	é a área da secção da nervura acima da posição z_{cp}
e	representa a excentricidade do pré-esforço
M_y	é o momento devido à carga vertical
τ_{xz}	é a tensão de corte
σ_x	define a tensão normal

Tendo assim em conta as tensões de corte devidas à transferência da força de pré-esforço, contrariando a anterior proposta:

$$\tau_{xz} = \frac{S_{cp} V_z}{I_y b} \quad (2.4)$$

onde V_z é o valor do esforço transversal na secção considerada.

Como o mecanismo de rotura considerado implica que as tensões de tracção devido ao corte atinjam a tensão de resistência à tracção do betão, o autor reescreveu os esforços obtidos segundo as direcções principais, relacionando as tensões de tracção actantes com as resistentes do betão:

$$f_{ct} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2} \quad (2.5)$$

onde f_{ct} é a tensão de resistência à tracção do betão e σ_1 tensão de tracção segunda as direcções principais.

Yang substituiu as equações (2.1) e (2.3) em (2.5) e resolveu em ordem a V_z , chegando a:

$$V_{z,\max} = \frac{b I_y}{S_{cp}} \left[\frac{\frac{b}{2S_{cp}} f_{ct} x_{cp} z_{cp} + \frac{S_{cp}}{b} \left(\frac{e}{I_y} - \frac{A_{cp}}{A S_{cp}} \right) \frac{dN_p}{dx} + \sqrt{\left(\frac{b}{2S_{cp}} f_{ct} x_{cp} z_{cp} \right)^2 + \left(\frac{e}{I_y} - \frac{A_{cp}}{A S_{cp}} \right) f_{ct} x_{cp} z_{cp} + \left(\frac{1}{A} - \frac{z_{cp}}{I_y} e \right) N_p f_{ct} + f_{ct}^2}} \right] \quad (2.6)$$

Yang sugere ainda, baseando-se num estudo pelo método dos elementos finitos, que no caso de a rotura ocorrer na zona de transferência da força de pré-esforço, a posição do ponto crítico pode ser prevista traçando uma linha a partir do apoio fazendo um ângulo de 35° com a horizontal, e interceptando-a com a linha horizontal que define a zona mais frágil, ou seja, a posição na altura da nervura para onde o esforço transversal resistente calculado é mínimo, que, no caso de alvéolos circulares, corresponde à zona de espessura mínima da nervura (Figura 2.2).

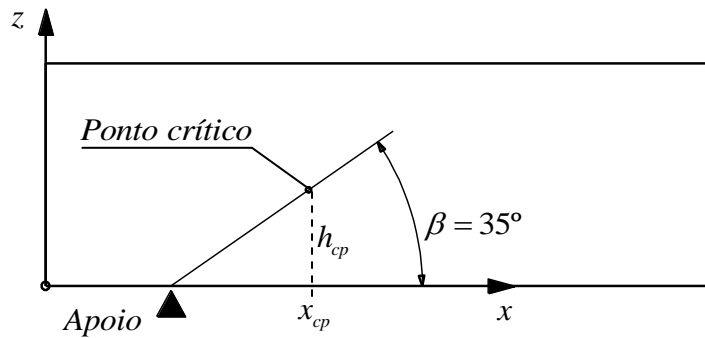


Figura 2.2 – Posição do ponto crítico junto ao apoio segundo Yang [9].

$$x_{cp} = \frac{h_{cp}}{\tan \beta} \approx \frac{h_{cp}}{0,7} \quad (2.7)$$

sendo h_{cp} a distancia segundo z desde a base da laje até ao ponto crítico.

A transferência da força de pré-esforço foi abordada da seguinte forma

$$\sigma_p = \begin{cases} 0; & 0 \leq x + L_s \leq 5\phi \\ \left[1 - \left(\frac{L_t + 5\phi - x - L_s}{L_t} \right)^2 \right] \sigma_{p0}; & 5\phi \leq x + L_s \leq 5\phi + L_t \\ \sigma_{p0}; & x + L_s \geq 5\phi + L_t \end{cases} \quad (2.8)$$

onde

σ_p é o pré-esforço na zona considerada

σ_{p0} é o pré-esforço efectivo for a da zona de tranferência

L_s é a distância horizontal entre o topo da laje e o centro do apoio

ϕ é o diâmetro do fio de pré esforço

L_t é um parâmetro que toma o valor 55ϕ no caso de a libertação do pré-esforço ser rápida e 60ϕ no caso deste processo se dar de forma lenta

2.2.3 Pajari, Matti

Pajari [2] debruçou-se sobre a problemática da resistência das nervuras ao esforço transversal e a localização do ponto crítico nas mesmas.

O autor ensaiou painéis individuais de laje alveolar com 5,01m de comprimento que variaram em espessura e no formato do alvéolo (200mm, 265mm e 265mm de espessura com alvéolos circulares e 320mm, 370mm, 400mm e 500mm de alvéolos não circulares) solicitando-as com uma carga de faca no sentido transversal. Os painéis estavam simplesmente apoiados sobre dois perfis metálicos, estando um livre de rodar em torno da direcção do eixo longitudinal da laje conforme mostrado na figura que se segue.

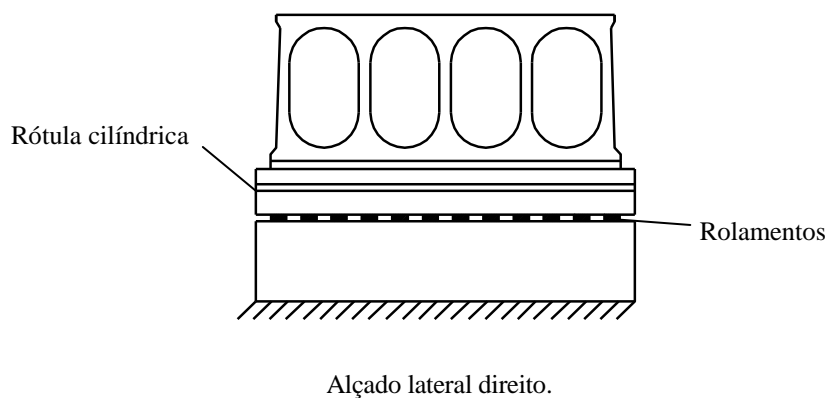
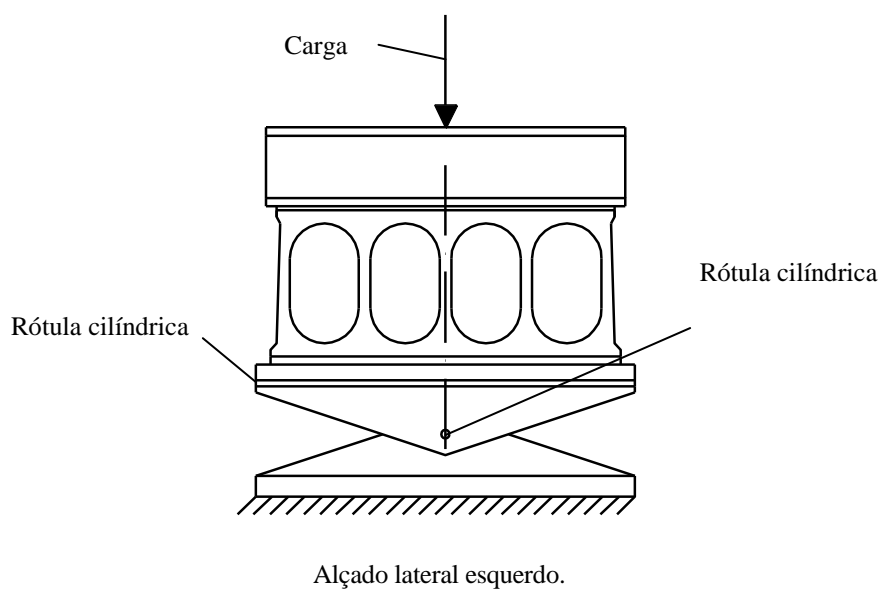
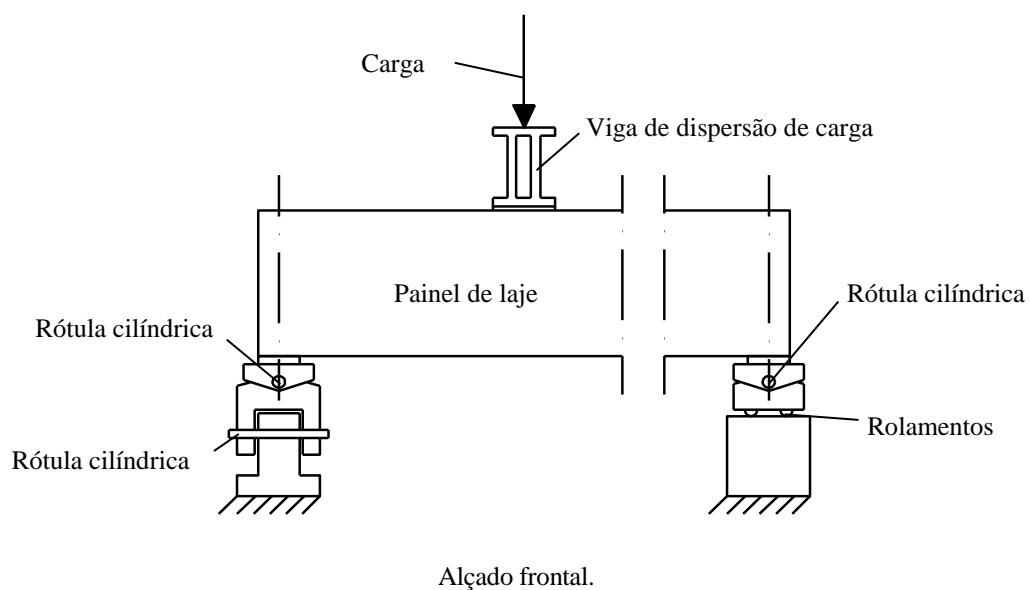


Figura 2.3 – Modelo de ensaio utilizado por Pajari [2].

Pajari [2] comparou então os resultados obtidos experimentalmente com os previstos pelo EC2 [8] e pelo método de Yang [9], sugerindo que este último para além de contabilizar o esforço transversal resultante da transferência do pré-esforço é teoricamente mais correcto.

Deste trabalho concluiu que o método de Yang [9] dá resultados mais próximos da realidade, ainda assim não estando totalmente do lado da segurança. Conclui também que o método sugerido pelo EC2 [8] dá resultados extremamente conservativos para lajes de alvéolos circulares e o contrário para lajes de alvéolos não circulares.

Uma vez desconhecidas as condições de armazenamento das lajes ensaiadas, consideraram-se dois valores de perda de pré-esforço, 5% e 15%.

Os resultados são mostrados nos seguintes gráficos.

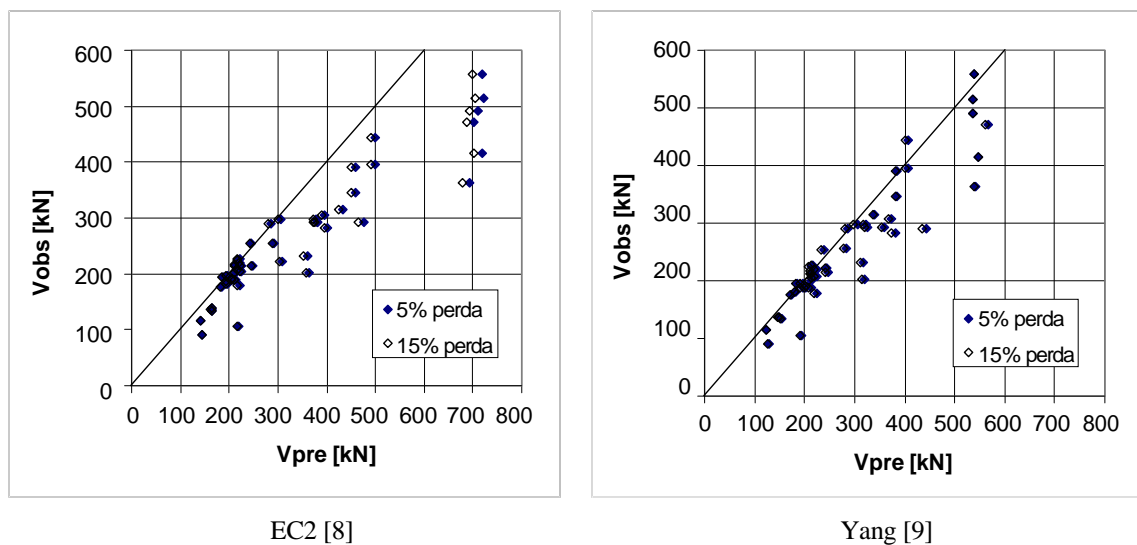
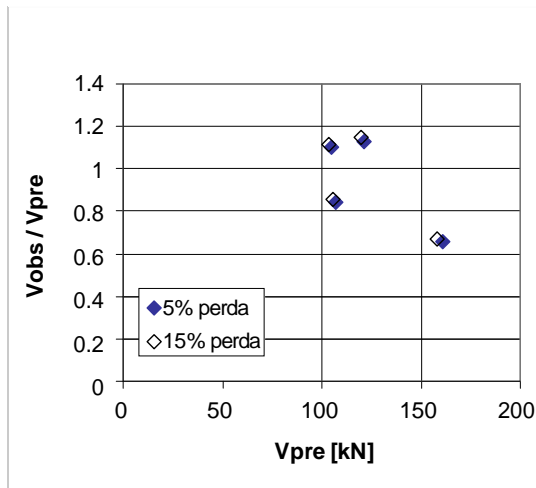
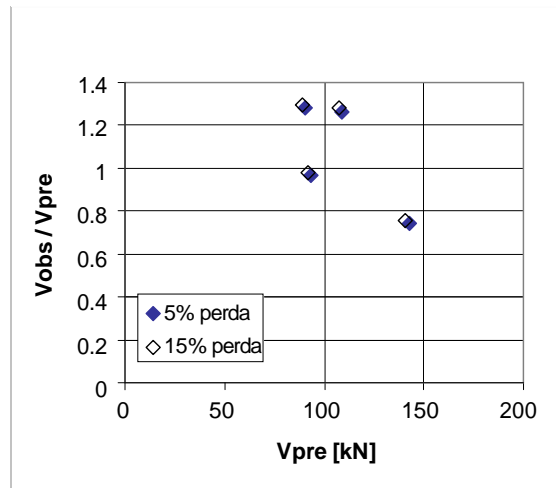


Figura 2.4 – Relação entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens.

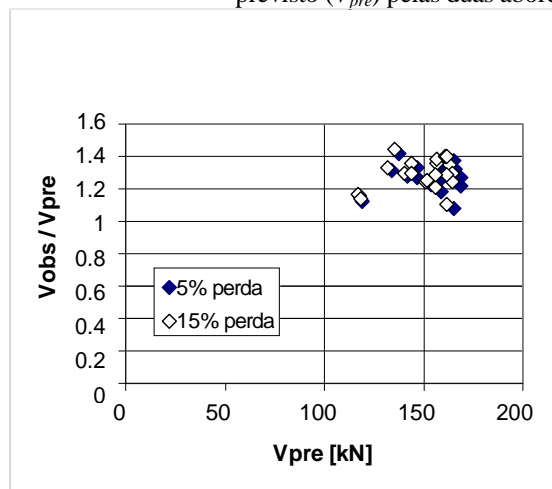


EC2 [8]

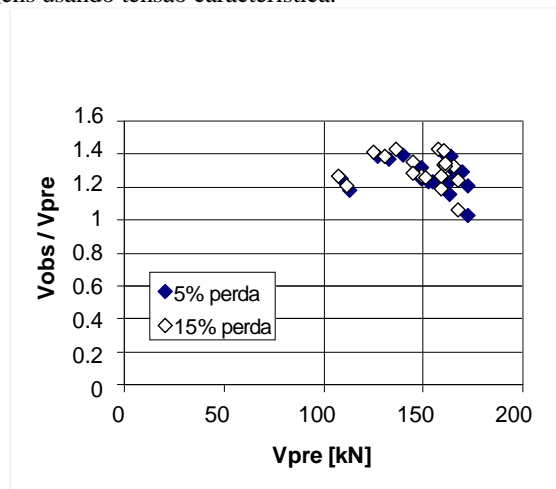


Yang [9]

Figura 2.5 – Lajes de 200mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica.

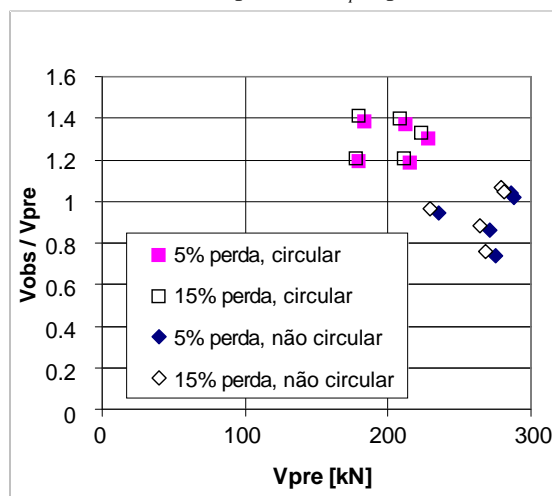


EC2 [8]

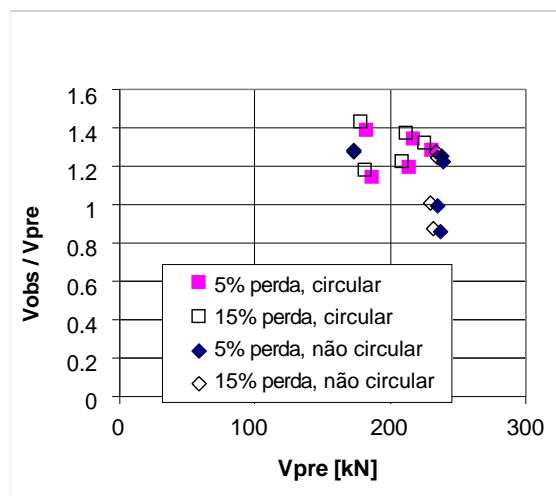


Yang [9]

Figura 2.6 – Lajes de 265mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica.



EC2 [8]



Yang [9]

Figura 2.7 – Lajes de 320mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica.

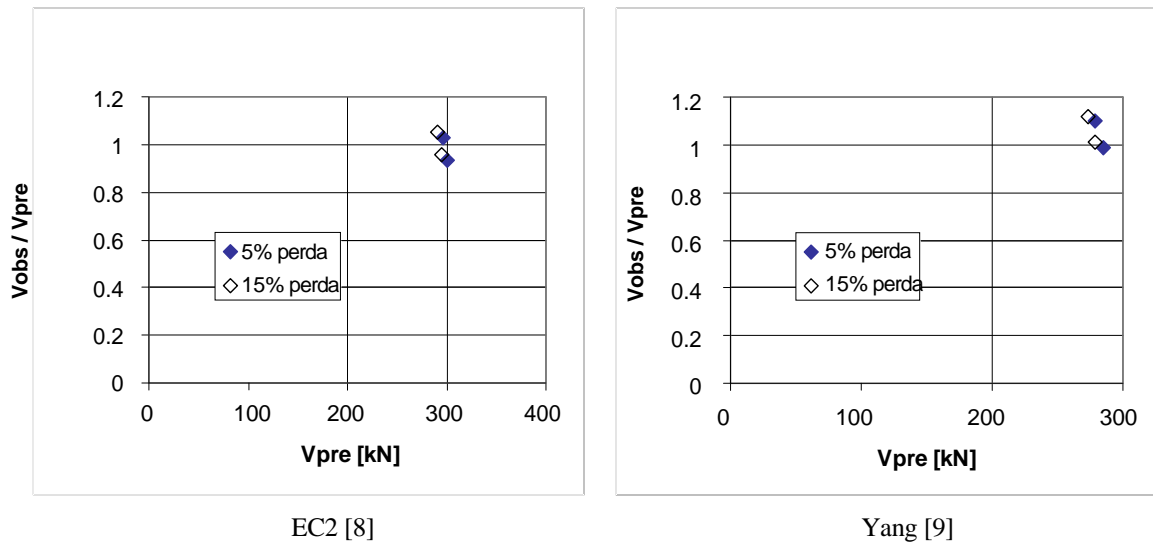


Figura 2.8 – Lajes de 370mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica.

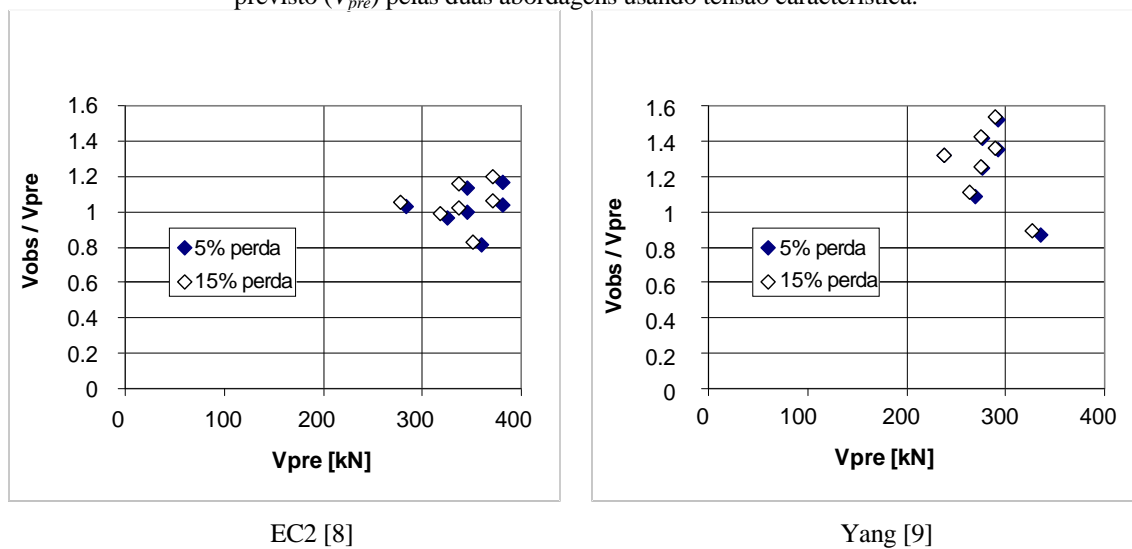


Figura 2.9 – Lajes de 400mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica.

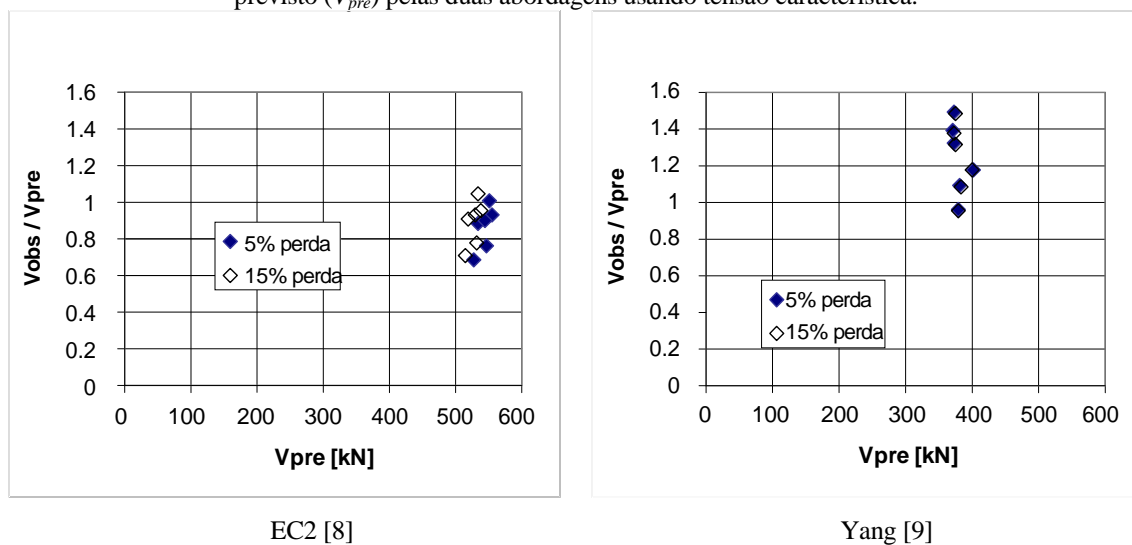


Figura 2.10 – Lajes de 500mm de espessura. Rácio entre o esforço transversal resistente observado (V_{obs}) e previsto (V_{pre}) pelas duas abordagens usando tensão característica.

Perante estes resultados, o autor sugere que o método de Yang [9] substitua o do EC2 [8].

Pajari [2] usou o método de Yang [9] para determinar a localização do ponto crítico – o ponto que apresenta menor esforço transversor resistente ao longo da altura da nervura. Assim, procurou encontrar o valor mínimo do esforço transversor resistente em função da altura da nervura – o ponto crítico – e o respectivo minimizante, concluindo que, segundo este método, se encontra no ponto em que a nervura é mais fina nos casos onde este aspecto é notório (Figura 2.9 a)) ou na interface inferior nervura-banzo nos casos em que não se consegue distinguir uma zona de espessura mínima na nervura (Figura 2.9 b)), como se mostra nos gráficos das Figuras 2.9 e 2.10.



Figura 2.11 – Posição da zona crítica ao longo da altura da nervura.

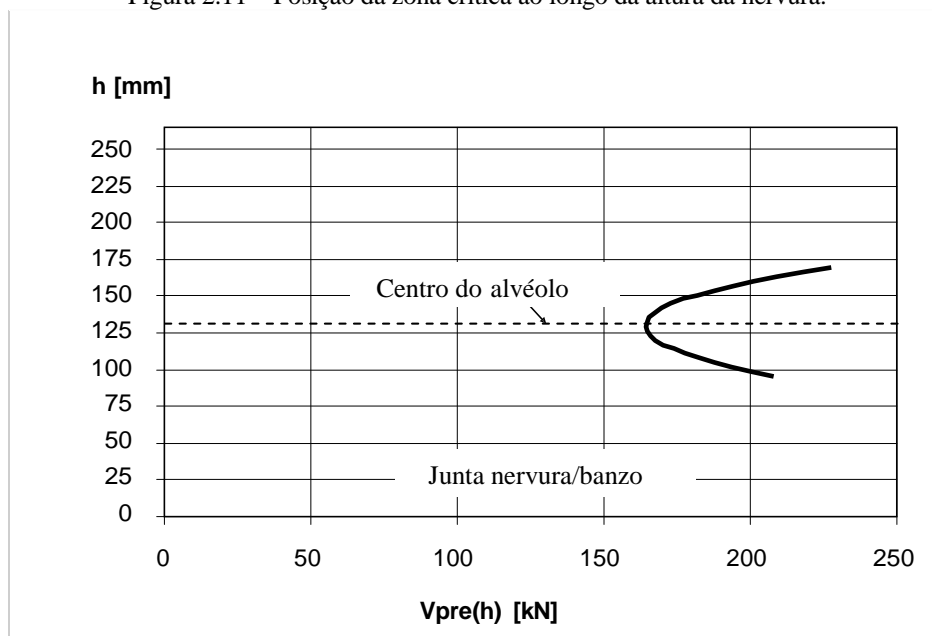


Figura 2.12 – Lajes de 265mm. Método de Yang [9]. Valor característico do esforço transversor resistente determinado a diferentes alturas da nervura.

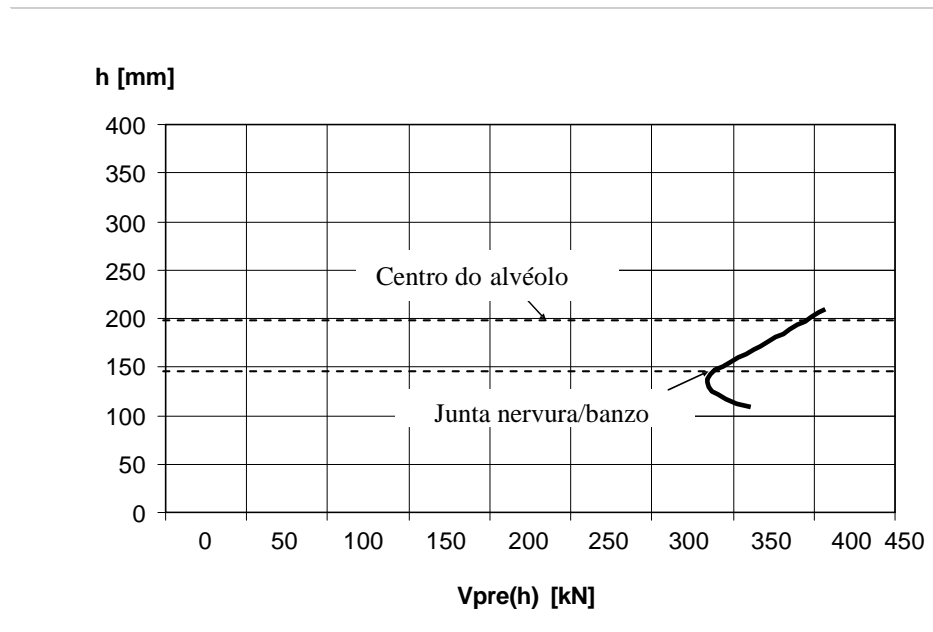


Figura 2.13 – Lajes de 400mm. Método de Yang [9]. Valor característico do esforço transverso resistente determinado a diferentes alturas da nervura.

2.2.4 Micallef, P.

Micallef [3] centrou o seu estudo na comparação entre a homogeneidade das lajes alveolares fabricadas no seu país, fazendo vários ensaios de punção usando a mesma metodologia usada por Pajari [2] de forma a comparar os resultados obtidos com as especificações que cada fabricante disponibiliza para o artigo produzido.

Embora o estudo em si não tenha especial relevância para este trabalho, o autor tira uma conclusão fundamental. Micallef conclui que não existe abertura de fendas de corte antes da rotura, como mostram os gráficos $V - \delta$. Esta conclusão permite que se aborde o problema através de uma análise elástica linear, isto é, a rotura acontece de forma brusca, no instante e em consequência da formação de fendas de corte na nervura.

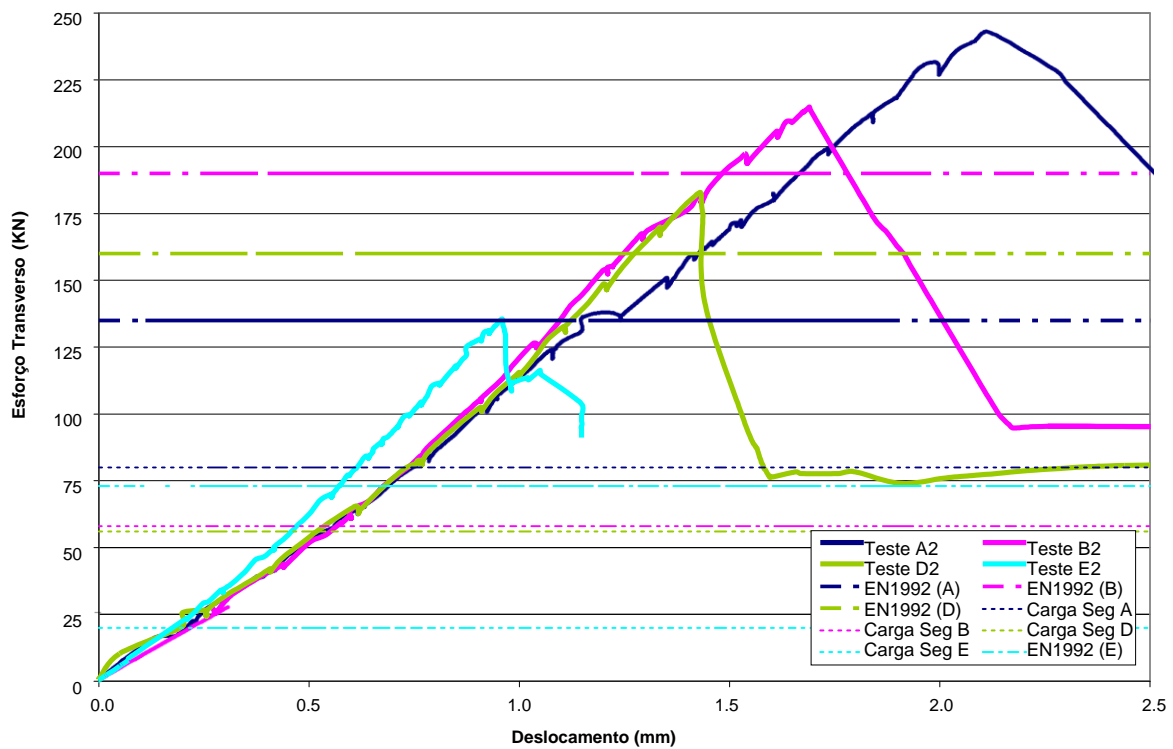


Figura 2.14 – Gráfico de Esforço Tansverso-Deslocamento. Micallef [3].

2.2.5 Martins, Silvia

Martins [4] estudou vários aspectos do comportamento de lajes alveolares sujeitas a cargas concentradas.

O trabalho foi dividido em cinco fases.

Nas quatro primeiras foram ensaiados painéis individuais e o esquema de ensaio consistiu numa laje simplesmente apoiada com vão de 1m, 0,2m de espessura e 1,2m de largura, conforme mostra a Figura 2.13.

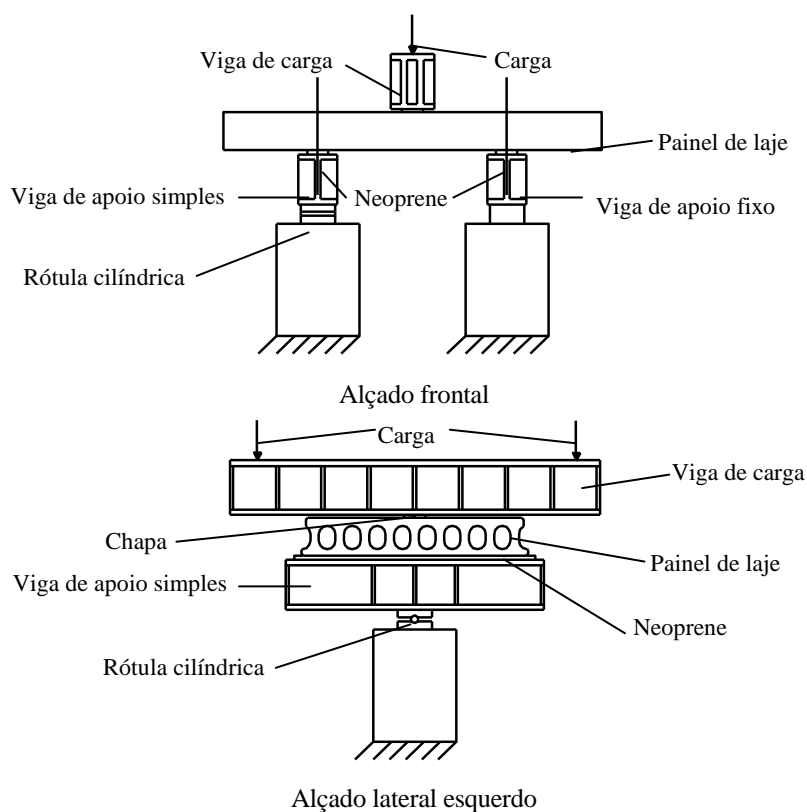


Figura 2.15 – Esquema de ensaio utilizado por Martins [4].

Na quinta fase foram ensaiados quatro painéis justapostos segundo o seguinte esquema:

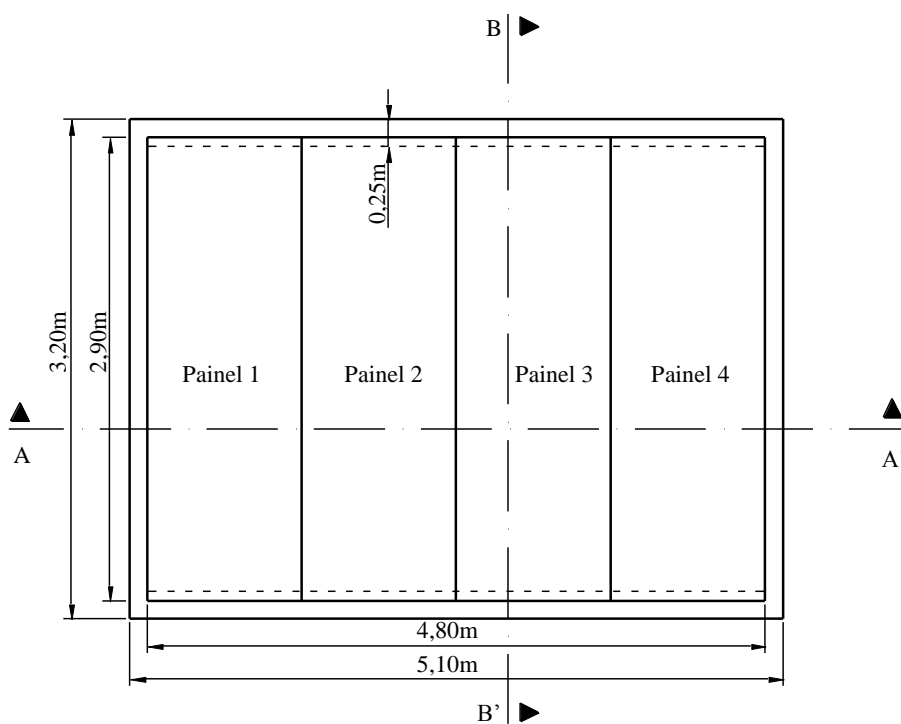


Figura 2.16 – Esquema do modelo de ensaio com quatro painéis em planta utilizado por Martins [4].

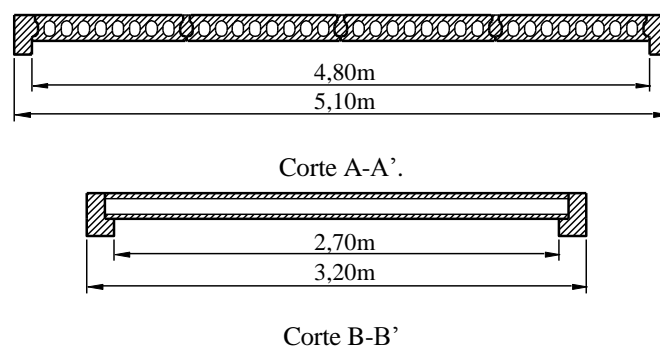


Figura 2.17 – Vistas em corte do modelo de ensaio com quatro painéis utilizado por Martins [4].

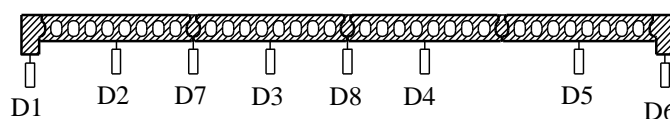


Figura 2.18 – Posição esquemática dos deflectómetros do modelo de ensaio com quatro painéis utilizado por Martins [4].

Note-se que os deflectómetros D7 e D8 foram usados apenas nos ensaios em que os respectivos pontos foram directamente carregados.

A metodologia de ensaio decorreu conforme descrito nas tabelas abaixo.

Tabela 2.4 – Metodologia de ensaio [4].

Fase de ensaios	Área Carregada	nº de Alvéolos Betonados	Posição da carga no painel		Posição da carga no vão		nº de ensaios
			Centro	Bordo	1/2 vão	Apoio	
1ª Fase	a)	-	√		nervura		5
	b)	0,10x0,10m ²	√			nervura	3
	c)	-	√		alvéolo		3
2ª Fase	a)	0,10x0,10m ²		√	alvéolo		4
	b)	-		√		alvéolo	3
3ª Fase	a)	0,15x0,15m ²	√		nervura		3
4ª Fase	a)	0,10x0,10m ²	2	√	alv. bet		3
	b)	4		√	alv. bet		3
5ª Fase	a)	0,10x0,10m ²	√		alvéolo		-
	b)	-	√		junta		-

Com os resultados das primeiras quatro fases, a autora tira conclusões sobre a influência de vários factores no comportamento de painéis isolados de laje alveolar, como as dimensões da área carregada, a posição da carga ao longo do vão e transversalmente, no centro e no bordo do painel, a zona de carga (alvéolo ou nervura) e ainda a influência de existência de alvéolos betonados.

A autora compreendeu que a carga de rotura é indiferente da zona de carga, pois os valores para o carregamento sobre o alvéolo e a nervura são praticamente coincidentes. Percebeu também que a carga máxima é menor quando a solicitação se dá junto ao apoio.

Finalmente, concluiu que a resistência é significativamente maior quando a solicitação incide num alvéolo betonado.

Os resultados obtidos encontram-se sintetizados na seguinte tabela.

Tabela 2.5 – Síntese dos resultados das fases 1-4 [4].

Designação do Ensaio	Carga de Fendilhação por flexão transversal		Carga de Rotura	
	Valores parciais [kN]	Valores Médios [kN]	Valores parciais [kN]	Valores Médios [kN]
1ªF a)	133,4	136,7	147,6	143,2
	119,5		129,7	
	-		149,0	
	-		140,8	
	-		-	
1ªF b)	157,3	136,5	149,1	109,5
	134,6		104,7	
	146,7		118,9	
	128,3		104,9	
1ªF c)	-	141,1	134,5	146,2
	145,4		154,0	
	136,8		150,0	
2ªF a)	-	-	173,7	163,5
	-		165,0	
	-		153,5	
	-		161,9	
2ªF b)	-	-	176,7	171,6
	-		170,1	
	-		168,0	
3ªF a)	124,0	126,9	148,7	160,0
	108,6		162,7	
	148,0		168,5	
4ªF a)	207,2	166,4	191,7	195,2
	128,0		193,9	
	164,0		200,0	
4ªF b)	-	-	214,4	203,3
	-		179,3	
	-		216,1	

Por sua vez, na última fase de ensaios, Martins [4] tira importantes conclusões sobre o comportamento de um painel de laje alveolar composto por vários painéis individuais, situação mais próxima da realidade da aplicação prática.

Os ensaios mostram que a fendilhação da junta betonada entre painéis adjacentes é um factor determinante no comportamento conjunto da laje.

A autora conclui que antes de haver fendilhação nas juntas entre painéis, por flexão transversal, a laje funciona como um só bloco, ao invés do que acontece após o referido fenómeno.

Os resultados são apresentados nos gráficos que se seguem e posteriormente comparados com as deformadas obtidas pela análise por elementos finitos.

- Carga no centro do painel nº. 2

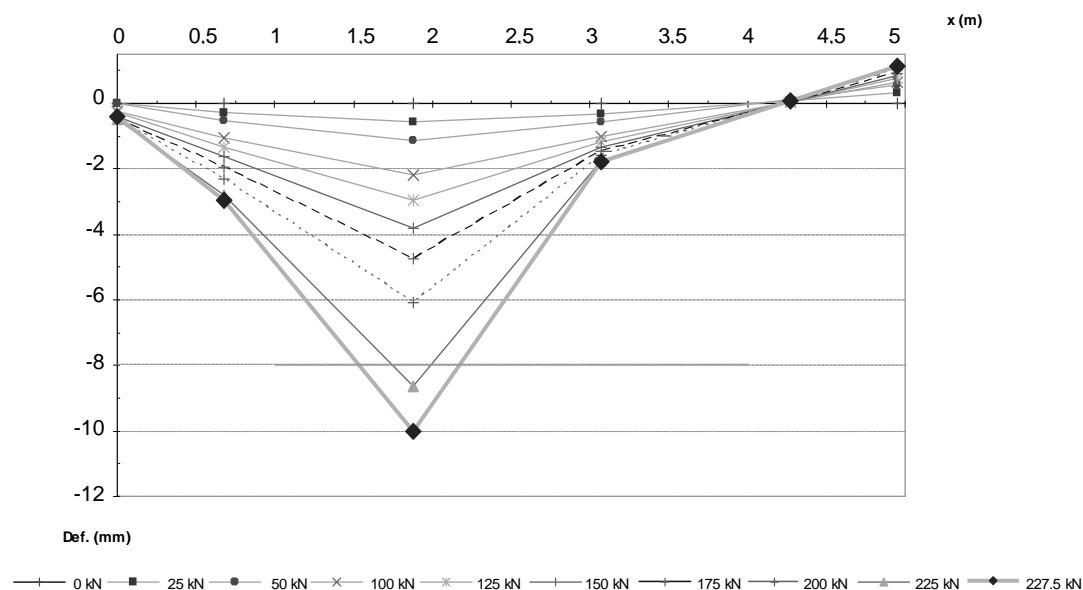


Figura 2.19 – Carga no 2º painel. Deformada segundo a direcção transversal. Martins [4].

- Carga no centro do painel nº. 3.

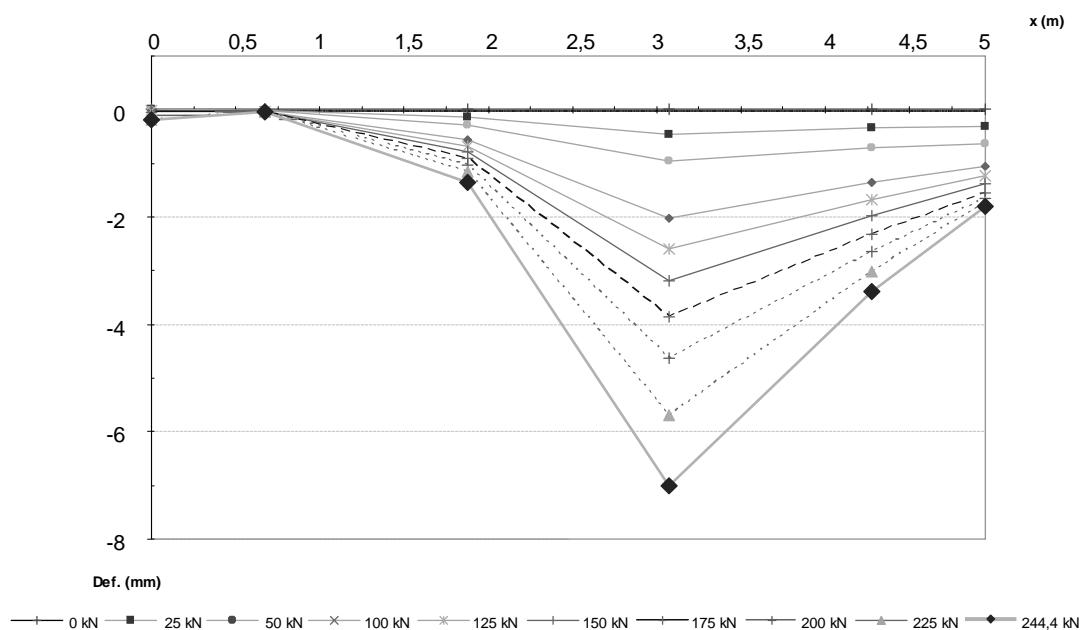


Figura 2.20 – Carga no 3º painel. Deformada segundo a direcção transversal. Martins [4].

- Carga no centro do painel n.º 4.

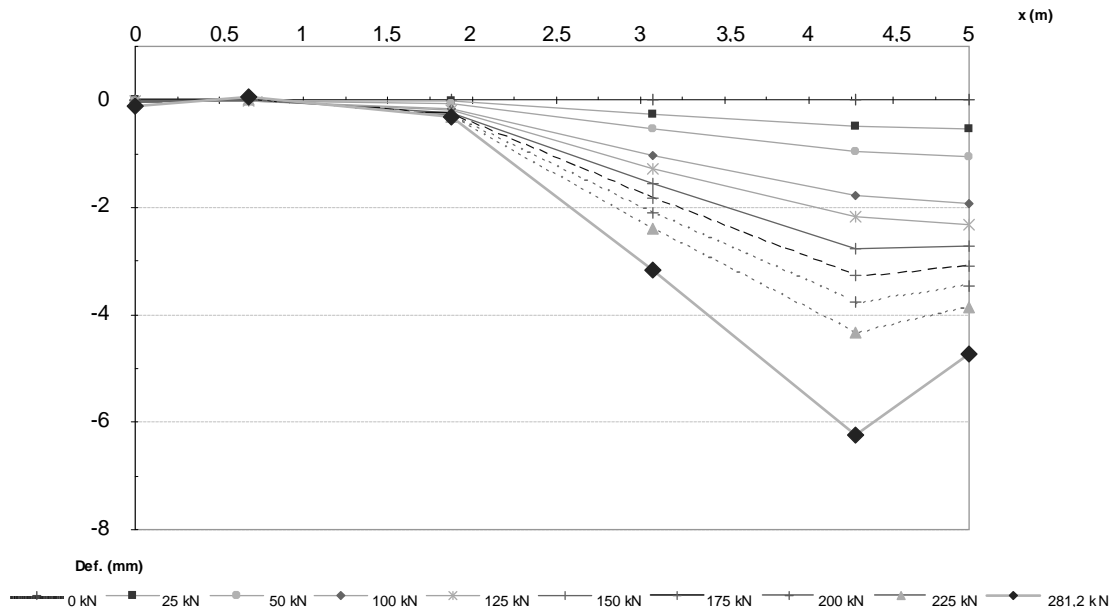


Figura 2.21 – Carga no 4º painel. Deformada segundo a direcção transversal. Martins [4].

2.2.6 EN1168:2005

De acordo com esta norma, devido à inexistência de armadura transversal nos painéis de laje alveolar, para evitar a fendilhação provocada pela flexão transversal resultante da aplicação de cargas concentradas, devem ser tomadas precauções, que dependem do modelo de cálculo adoptado. No caso de não ser considerada a repartição transversal de esforços entre painéis adjacentes, a norma impõe que a tensão limite considerada é $f_{ctk0,05}$, que corresponde a um estado limite de utilização. Adopta-se, portanto, como valor máximo da carga concentrada

$$F_k = 3W_\lambda f_{ctk0,05} \quad (2.9)$$

onde W_λ representa o módulo de flexão transversal relativo à fibra inferior por unidade de comprimento.

Nesta mesma norma, propõe-se que a resistência ao punçoamento (V_{Rd}) em lajes alveolares sem betão complementar é dada por:

$$V_{Rd} = b_{eff} h f_{ctd} \left[1 + 0,3 \alpha_l \frac{\sigma_{cp}}{f_{ctd}} \right] \quad (2.10)$$

onde:

f_{ctd}

é o valor de cálculo da resistência à tracção do betão

$\alpha_l = l_x / l_{pt} \leq 1$ é a razão entre a distância da secção em causa à extremidade da laje (l_x) e a distância de transferência da carga de pré-esforço para o betão (l_{pt}), definida no ponto 6.22 da EN1992-1-1 [6]

σ_{cp} é a tensão média de compressão no betão devido ao pré-esforço

b_{eff} é a largura efectiva das almas intervenientes, conforme indicado na Figura (2.22)

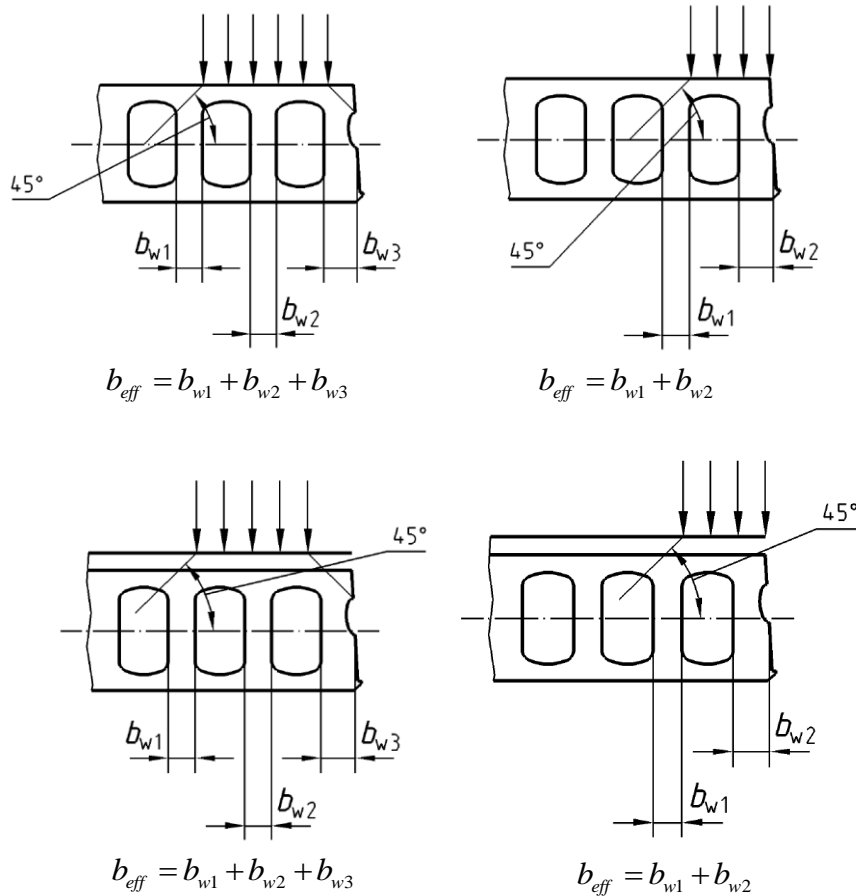


Figura 2.22 – Largura efectiva das nervuras. EN1168:2005 [8].

Quanto à resistência ao esforço transversal por unidade de largura para uma laje não fendilhada, a norma sugere a expressão

$$V_{Rd,c} = \frac{Ib}{S} \sqrt{(f_{ctd})^2 + \alpha_l \sigma_{cp} f_{ctd}} \quad (2.11)$$

Onde

I é o momento de inércia da secção de betão por unidade de largura de laje

b é a espessura total das almas por unidade de largura de laje

S é o momento estático, em relação à linha neutra, da secção acima do centro de massa por unidade de largura de laje

Nos casos em que existem alvéolos preenchidos com betão complementar, deve ser adicionada uma parcela que corresponde à resistência ao corte do betão complementar do interior dos alvéolos. Nestas condições, tem-se

$$V_{Rd,c} = V_{Rd,c} + \frac{2}{3} n b_c d f_{ctd} \quad (2.12)$$

Onde

n é o número de alvéolos betonados por unidade de largura do painel de laje

b_c é a largura do alvéolo

f_{ctd} é o valor de cálculo da resistência à tracção do betão

d é distância desde o centro de massa da armadura longitudinal inferior até à fibra de betão superior como mostra a Figura 2.26.

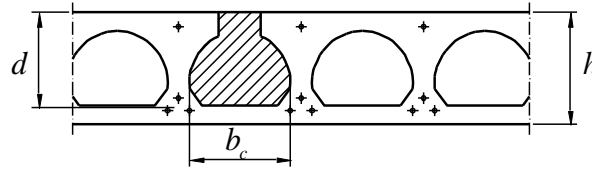


Figura 2.23 – Laje alveolar com alvéolo betonado. EN1168:2005 [8].

2.2.7 EN1168:2005+A1:2008

Posteriormente aos trabalhos de Pajari [2], a metodologia de cálculo da resistência ao esforço transversal em lajes alveolares em situação não fendilhada foi rectificada passando a contabilizar as forças de corte devidas à transferência de pré-esforço, sendo agora válida a expressão presente na EN1168:2005+A1:2008 [5] e sugerida por Yang [citação]

$$V_{Rdc} = \frac{I b_w(y)}{S_c(y)} \left(\sqrt{(f_{ctd})^2 + \sigma_{cp}(y) f_{ctd}} - \tau_{cp}(y) \right) \quad (2.13)$$

Onde

$$\sigma_{cp}(y) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{1}{A} + \frac{(Y_c - y)(Y_c - y p_t)}{I} \right] \cdot P_t(l_x) \right\} + \frac{M_{Ed}}{I} \cdot (Y_c - y) \quad (2.14)$$

$$\tau_{cp}(y) = \frac{1}{b_w(y)} \cdot \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{A_c(y)}{A} - \frac{S_c(y) \cdot (Y_c - y p_t)}{I} + C p_t(y) \right] \cdot \frac{dP_t(l_x)}{dx} \right\} \quad (2.15)$$

Os símbolos utilizados significam:

I é o momento de inércia da nervura

$b_w(y)$ representa a espessura da nervura a uma altura y

y_c é a posição do centro de massa da nervura

f_{ctd} é o valor de cálculo da tensão resistente à tracção do betão

$S_c(y)$ é o momento estático da parcela de nervura acima da posição y em torno do centro de massa

y representa a altura do ponto crítico

l_x é a distância no sentido longitudinal da nervura a que o ponto de rotura se encontra a partir do ponto em que se inicia a transferência de pré-esforço

$\sigma_{cp}(y)$ define a tensão de compressão instalada no betão à altura y e distância l_x

n é o número de camadas de fios de pré-esforço

A define a área da secção da nervura

$P_t(l_x)$ representa a força de pré-esforço à distância l_x .

M_{Ed} é o momento devido à carga vertical. Este parâmetro pode ser desprezado.

$\tau_{cp}(y)$ é a tensão de corte devido à transferência do pré-esforço à altura y e distância l_x

$A_c(y)$ define a área da nervura acima da altura y

$Cp_t(y)$ é um factor que tem em conta a posição em altura do fio de pré-esforço considerado

$$Cp_t = -1, \quad \text{se } y \leq yp_t$$

$$Cp_t = 0, \quad \text{se } y > yp_t$$

yp_t é a altura do fio de pré-esforço considerado

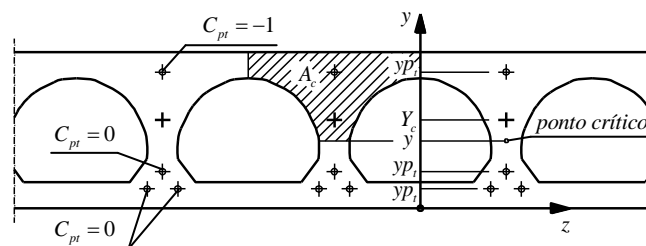


Figura 2.24 – Esquema explicativo das grandezas envolvidas no cálculo do esforço transverso resistente

Em alternativa, pode ser usada a expressão simplificada

$$V_{Rdc} = \varphi \frac{Ib_w}{S} \left(\sqrt{(f_{ctd})^2 + \beta \alpha_l \sigma_{cp} f_{ctd}} \right) \quad (2.16)$$

Onde

$\alpha_l = l_x / l_{pt2}$ é o grau de transmissão de pré-esforço ($\alpha_l \leq 1,0$)

l_{pt2} é o valor mais alto da distância de transmissão (eq. (8.18) EN 1992-1-1:2004)

$\sigma_{cp} = N_{Ed} / A$ representa a compressão média na nervura

$f_{ctd} = f_{ctk0,05} / \gamma_c$ é o valor de cálculo da tensão resistente à tracção do betão

$\varphi = 0,8$ é um factor de redução

$\beta = 0,9$ é um factor de redução referente à distância de transmissão

Para auxiliar ao cálculo destes valores podem ser usadas as tabelas do Anexo I.

CAPÍTULO 3

CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA DAS LAJES ALVEOLARES

Neste capítulo caracterizar-se-á a laje alveolar do ponto de vista das propriedades mecânicas. Primeiro será feita a aplicação da teoria das lajes ao caso particular da laje alveolar. De seguida, usando conclusões da primeira abordagem e usando um programa de cálculo automático, far-se-á a caracterização mecânica da laje alveolar, quantificando as rigidezes de flexão, corte e torção. Por último, propõe-se métodos expeditos para uma caracterização rápida das mesmas grandezas.

3.1 DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

Uma vez que, como foi referido por Micallef [3], é possível efectuar uma análise elástica linear, será esse o caminho a tomar neste estudo. Na análise elástica da laje alveolar seguiu-se o procedimento sugerido por Ugural [7].

Considerou-se um elemento infinitesimal (Figura 3.2) do painel de laje (Figura 3.1), não coincidente com o do ponto de aplicação da carga concentrada.

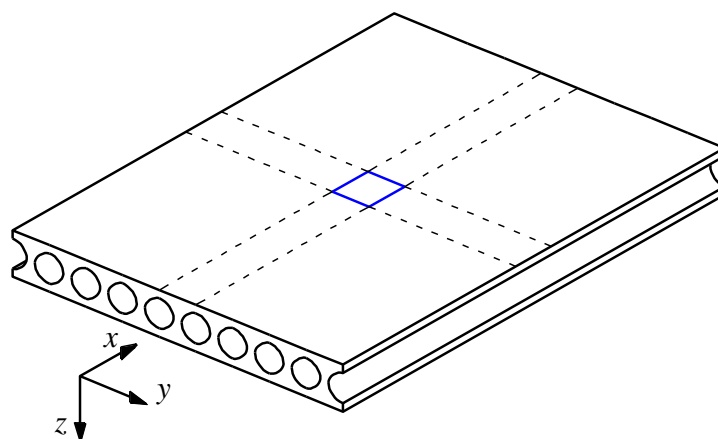


Figura 3.1 – Painel genérico de HCS.

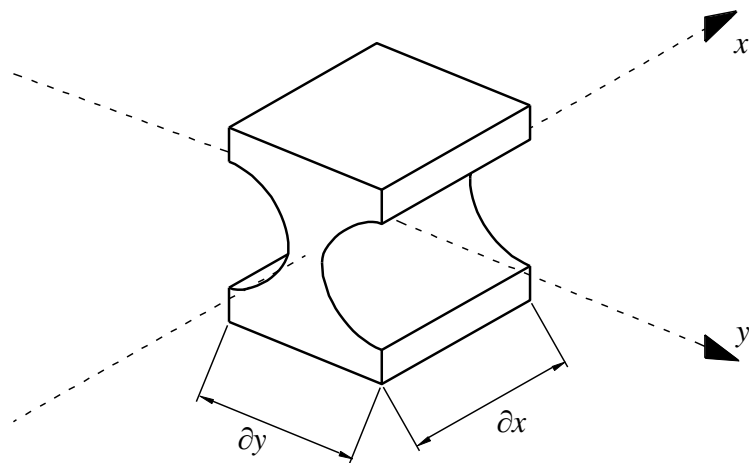


Figura 3.2 – Elemento infinitesimal do painel genérico de HCS.

As forças que actuam neste elemento são m_x , m_y , v_x , v_y , m_{xy} e m_{yx} , como mostra a Figura 3.3.

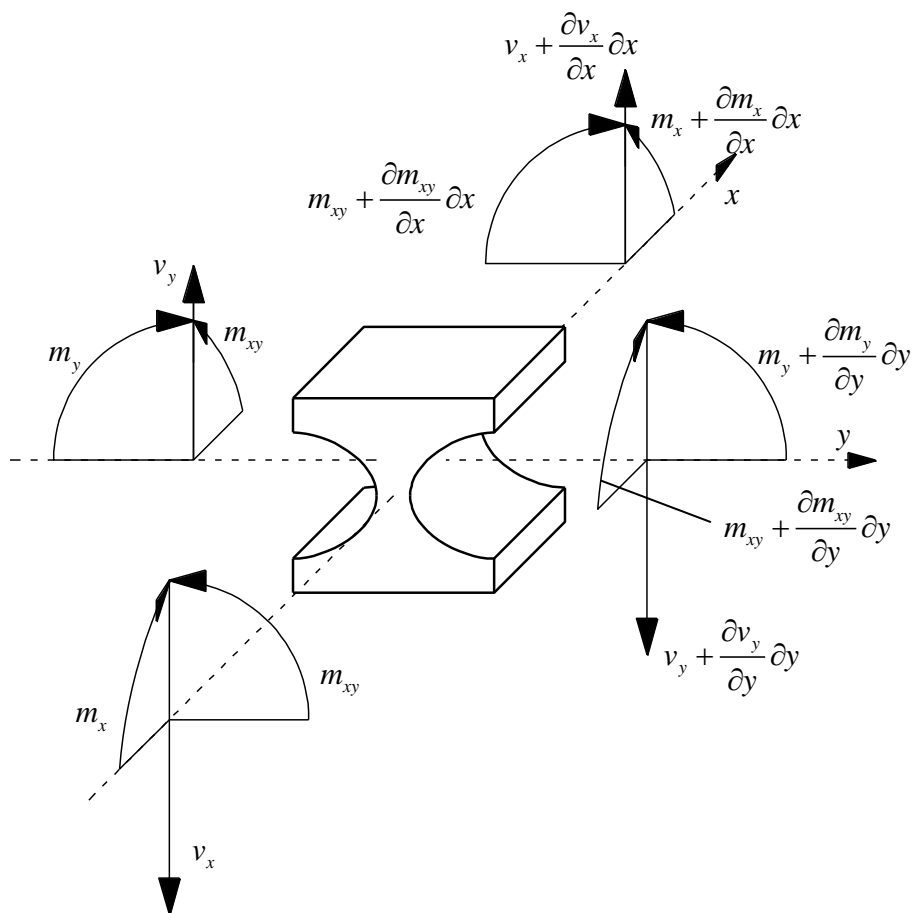


Figura 3.3 – Forças actuantes no elemento infinitesimal do painel genérico de HCS.

Da premissa de que as forças têm de estar em equilíbrio estático, resultam as equações

$$\sum v = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum m_x = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum m_y = 0 \quad (3.3)$$

onde v representa as forças verticais e m_x e m_y os momentos actuantes nas respectivas direcções.

Admitindo que o elemento infinitesimal tem uma dimensão unitária segundo os eixos x e y , e uma vez que Q_x e Q_y se anulam nas faces opostas do elemento considerado, restam apenas as parcelas diferenciais, donde resulta

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = 0 \quad (3.4)$$

ou

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

As restantes equações obtiveram-se anulando o somatório de momentos no centro do elemento infinitesimal tendo em conta que, como no caso anterior, as parcelas não infinitesimais dos momentos se anulam, resultando para o caso dos momentos em torno de x

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} dy + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx - v_y dy - \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dy = 0 \quad (3.6)$$

Sendo a última parcela um diferencial de ordem superior aos restantes, este valor é muito pequeno quando comparado com os demais, logo

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - v_y = 0 \quad (3.7)$$

E analogamente para a outra direcção

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0 \quad (3.8)$$

Substituindo agora as equações (3.7) e (3.8) em (3.5), chega-se a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = 0 \quad (3.9)$$

Considerando agora a um painel de laje em flexão (Figuras 3.4 e 3.5), onde se mostram sobrepostas as configurações indeformada e deformada, adotando para os eixos longitudinal e perpendicular ao esquema as letras x e y respectivamente, sendo o sentido positivo de z o sentido descendente, tem-se

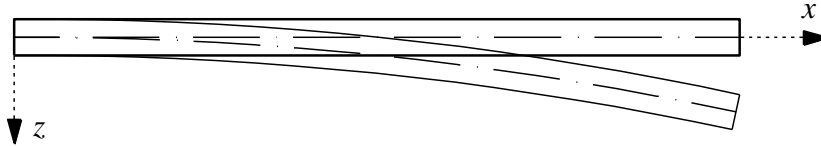


Figura 3.4 – Esquema da deformada do painel de laje em flexão.

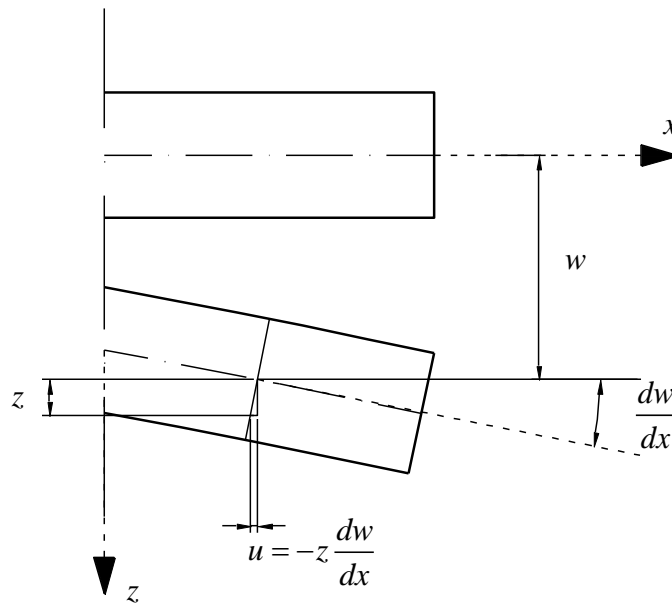


Figura 3.5 – Deslocamentos infinitesimais resultantes da deformada.

Para que estas suposições sejam reais, admite-se a aplicação das hipóteses de Kirchhoff para lajes finas, isto é, em que a deformação por corte é desprezável face à deformação por flexão, ou seja:

- A deformação do plano médio é pequena quando comparada com a espessura da laje;

- O plano médio mantém-se indeformado;
- Os planos verticais mantêm-se perpendiculares ao plano médio;
- As tensões verticais são pequenas quando comparadas com as restantes.

Considerando estes deslocamentos, pode escrever-se as extensões segundo as direcções x e y e a distorção xy :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.12)$$

Substituindo u nas expressões anteriores, tem-se

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.14)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.15)$$

Por outro lado, pela lei de Hooke, pode escrever-se na forma

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu_x \sigma_y] \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu_y \sigma_x] \quad (3.17)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.18)$$

que, uma vez reescritas de forma a evidenciar as tensões, resultam

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu_x \nu_y} [\varepsilon_x + \nu_x \varepsilon_y] \quad (3.19)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu_x\nu_y} [\varepsilon_y + \nu_y \varepsilon_x] \quad (3.20)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (3.21)$$

Substituindo as equações (3.13), (3.14) e (3.15) em (3.19), (3.20) e (3.21), resulta

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.22)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3.23)$$

$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.24)$$

Estas tensões resultam em momentos flectores e torsões no elemento de laje considerado. Integrando estas tensões nos sentidos vertical e segundo os eixos perpendiculares ao da acção das mesmas, tem-se

$$m_x = \int z \sigma_x \partial z \partial y \quad (3.25)$$

$$m_y = \int z \sigma_y \partial z \partial x \quad (3.26)$$

Integrando,

$$\int z \sigma_x \partial z \partial y = \int -\frac{Ez^2}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \partial z \partial y \quad (3.27)$$

$$\int z \sigma_y \partial z \partial x = \int -\frac{Ez^2}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \partial z \partial x \quad (3.28)$$

Reescrevendo as expressões tirando os parâmetros constantes do integral

$$-\frac{E}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \int z^2 dz dy = -\frac{EI_y}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.29)$$

$$-\frac{E}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \int z^2 dz dx = -\frac{EI_x}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3.30)$$

ou seja,

$$m_x = -\frac{EI_y}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.31)$$

$$m_y = -\frac{EI_x}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3.32)$$

No caso particular das tensões tangenciais, o problema torna-se mais complexo, pois estas dependem da distribuição de tensões nas duas direcções, o que devido à diferente geometria, merece uma apreciação mais cuidada. Considerou-se, portanto, que a contribuição das nervuras é desprezável, pois os momentos provocados pelas tensões nesta zona são muito pequenos face ao resultante da integração das tensões actuantes nas lâminas superior e inferior, logo, o erro introduzido não é significativo. Fica-se portanto com uma secção efectiva igual à da faceta yz , logo,

$$m_{xy} = \int z \tau_{xy} \partial z \partial x = \int -2Gz^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \partial z \partial x \quad (3.33)$$

cujo resultado da integração é

$$-2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int z^2 \partial A = -2GI_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.34)$$

Substituindo agora os resultados obtidos acima na equação (3.9), resulta

$$\frac{EI_y}{1-\nu_x\nu_y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 4GI_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{EI_x}{1-\nu_x\nu_y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (3.35)$$

onde, simplificando

$$\frac{EI_y}{1-\nu_x\nu_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left(\frac{E}{1-\nu_x\nu_y} \left[\frac{I_y\nu_x + I_x\nu_y}{2} \right] + 2GI_x \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{EI_x}{1-\nu_x\nu_y} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (3.36)$$

considerando

$$C_\nu = \frac{\nu_y}{\nu_x} \quad (3.37)$$

e admitindo que

$$\nu = \nu_y = C_\nu \nu_x \quad (3.38)$$

pode substituir-se (3.38) em (3.36), fazendo

$$\nu_x \nu_y = C_\nu \nu^2 \quad (3.39)$$

Escrevendo agora, simplificadamente

$$\frac{EI_i}{1 - C_\nu \nu^2} = D_i \quad (3.40)$$

$$GI_x = G_{xy} \quad (3.41)$$

$$\frac{E\nu}{1 - C_\nu \nu^2} \left[\frac{I_y C_\nu + I_x}{2} \right] = D_\nu \quad (3.42)$$

e

$$H = D_\nu + 2G_{xy} \quad (3.43)$$

pode-se reescrever a equação (3.36) da forma

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (3.44)$$

Esta equação é equivalente à equação de equilíbrio das lajes ortotrópicas de acordo com Ugural [7]. Está portanto demonstrado que se podem considerar as lajes alveolares como lajes ortotrópicas.

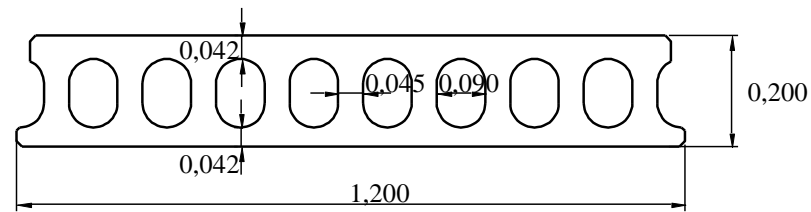
3.2 MODELO SIMPLIFICADO

Deve agora caracterizar-se o painel de laje do ponto de vista mecânico para que, com o conhecimento da grandeza das várias rigidezes, seja possível ter uma melhor percepção da distribuição de esforços.

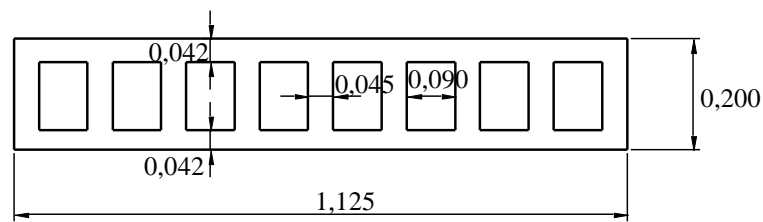
A complexidade e variedade geométrica dos elementos de laje alveolar implicam secções transversais pouco regulares, pelo que, para eliminar variáveis de difícil quantificação, foi adoptado um painel de laje simplificado que, mantendo as características dominantes, se torna mais fácil de analisar.

A simplificação do modelo consistiu, apenas, em tornar os alvéolos angulosos e eliminar as saliências dos bordos do painel. A espessura dos elementos verticais e horizontais é igual à menor espessura dos respectivos elementos do painel original, mantendo-se constante a altura.

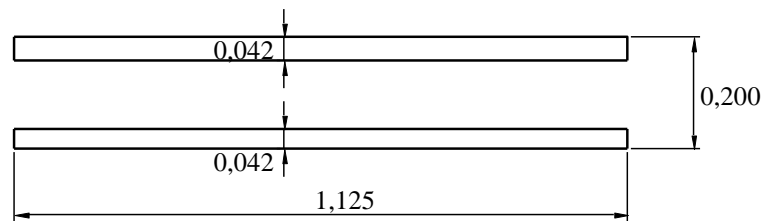
Estas alterações permitem perceber que existem agora duas secções transversais bem definidas pois, longitudinal e transversalmente, as secções resumem-se aos esquemas das Figuras 3.6 e 3.7.



(a)

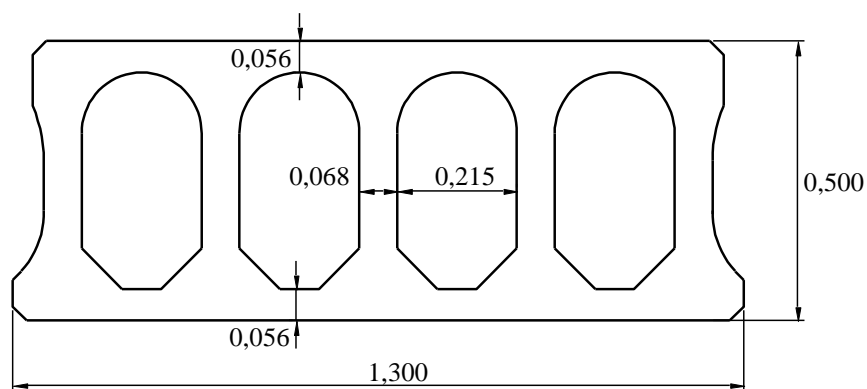


(b)

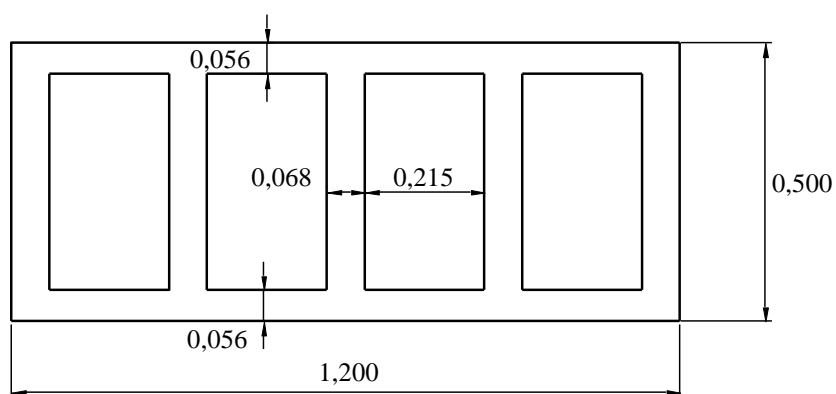


(c)

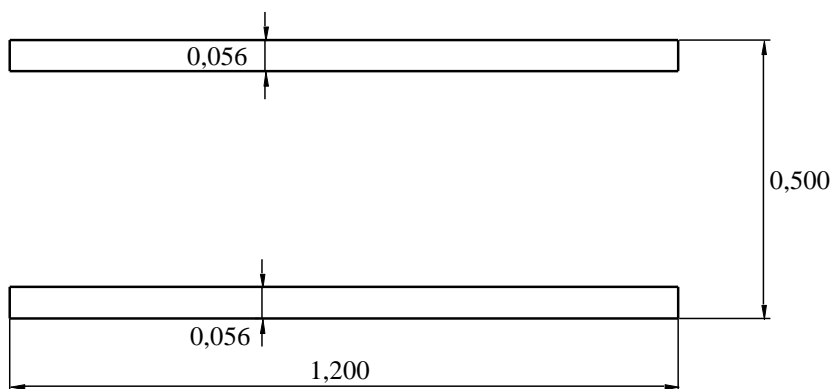
Figura 3.6 – Laje de 0,2m de espessura. (a) Secção longitudinal original; (b) Secção longitudinal simplificada; (c) Secção Transversal simplificada.



(a)



(b)

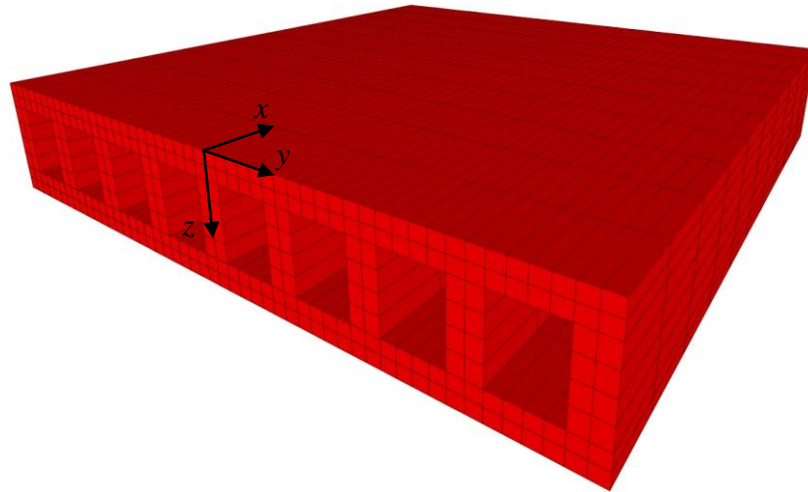


(c)

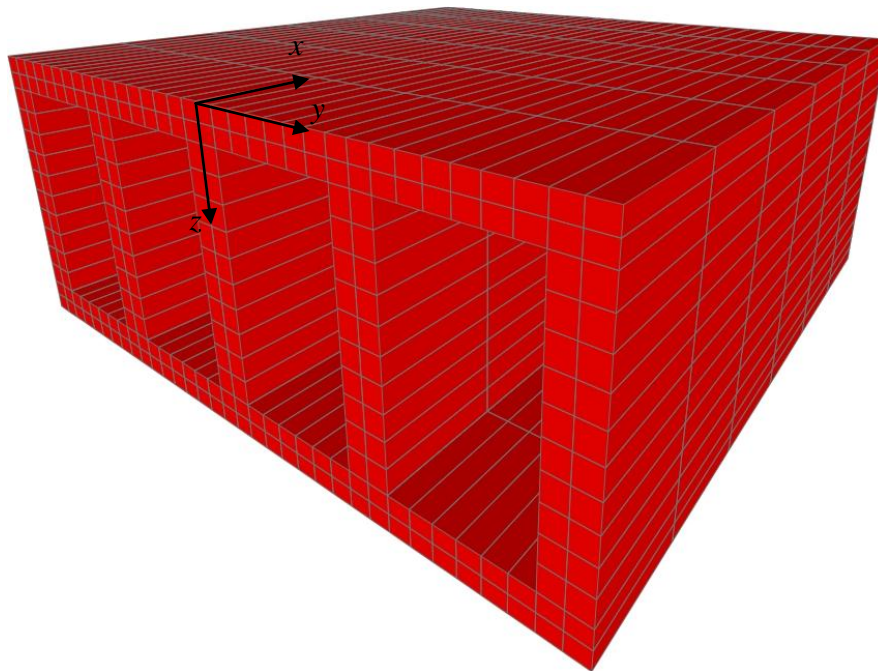
Figura 3.7 – Laje de 0,5m de espessura. (a) Secção longitudinal original; (b) Secção longitudinal simplificada; (c) Secção Transversal simplificada.

Para determinar as características da laje ensaiaram-se os seguintes modelos de sólidos no programa de elementos finitos comercial SAP2000®.

Os modelos consistem em dois painéis de laje de com alturas de 0,200m e 0.500m e áreas de $1.125 \times 1.125 \text{m}^2$ e $1.200 \times 1.200 \text{m}^2$ com as seguintes secções mostradas nas Figuras 3.6 b), 3.6 c) e Figuras 3.7b), 3.7c) respectivamente. Estes elementos serão denominados HCS20 e HCS50, respectivamente.



(a)



(b)

Figura 3.8 – Modelos em elementos de sólido utilizados na modelação. (a) HCS20; (b) HCS50.

Os modelos foram desenhados de modo a ser possível ter pontos nas linhas médias das nervuras, lâmina superior e inferior e centros geométricos dos modelos.

O material usado tem as seguintes características:

$$\begin{aligned} E &= 30\text{GPa} \\ \nu &= 0.2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

com

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 12.5\text{GPa} \quad (3.46)$$

Seguidamente, fazer-se-á a caracterização detalhada do elemento HCS20 e apresentar-se-á o respectivo resultado para o elemento HCS50, visto que ambos são calculados de forma análoga.

3.3 DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DE FLEXÃO

Aplicou-se o seguinte procedimento para determinar a rigidez de flexão.

Considerou-se um painel de laje sujeito ao sistema de forças esquematizado na Figura 3.9.

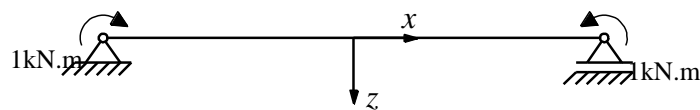


Figura 3.9 – Esquema estrutural e de forças utilizado na caracterização do elemento HCS.

Desta forma, consegue-se um sistema equilibrado exclusivamente pelas forças aplicadas, ou seja, as reacções nos apoios são nulas. O diagrama de esforços resultante é o representado na Figura 3.10.



Figura 3.10 – Diagrama de momento flector resultante do sistema utilizado.

Sabendo da resistência de materiais que, para um elemento de rigidez constante, a curvatura é proporcional ao momento actuante, tem-se que

$$\frac{1}{R} = \frac{M_x}{EI_y} \quad (3.47)$$

onde, neste caso,

$$M_x = cte \Rightarrow R_x = cte \quad (3.48)$$

sendo o raio de curvatura R_x um valor constante, conclui-se que a deformada é circular.

Nestas condições, pode calcular-se o raio de curvatura R_x sabendo unicamente a flecha relativamente a uma linha secante à deformada e o comprimento da mesma, como mostra a Figura 3.11.

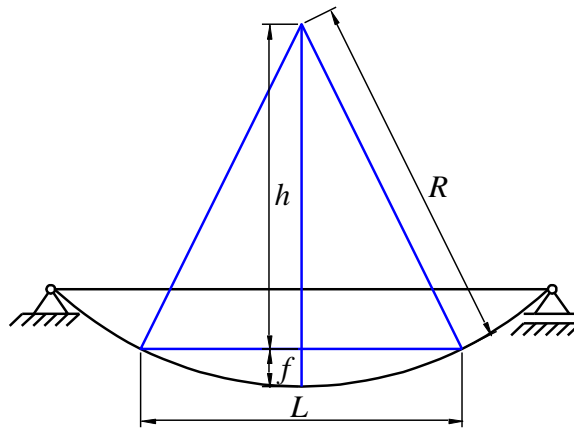


Figura 3.11 – Formulação geométrica para o cálculo do raio de curvatura.

Partindo das premissas

$$R = h + f \quad (3.49)$$

e

$$R^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad (3.50)$$

substituindo (3.49) em (3.50),

$$R^2 = (R - f)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad (3.51)$$

que uma vez simplificado resulta

$$\frac{1}{R} = \frac{2f}{f^2 + \frac{L^2}{4}} \quad (3.52)$$

Nesta análise, poder-se-ia usar a formulação do método das diferenças finitas para a determinação da curvatura; no entanto, optou-se pela formulação descrita por ser exacta e não ser influenciada por erros de discretização que surgem no método referido.

3.3.1 DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DE FLEXÃO SEGUNDO X

Para garantir que o resultado seja o mais preciso possível, os apoios foram reduzidos aos estritamente indispensáveis, tendo sido apenas utilizados dois apoios com deslocamentos verticais impedidos, para que servissem de referência ao deslocamento vertical dos restantes pontos, e apoios para impedir a rotação das faces laterais em torno do eixo longitudinal.

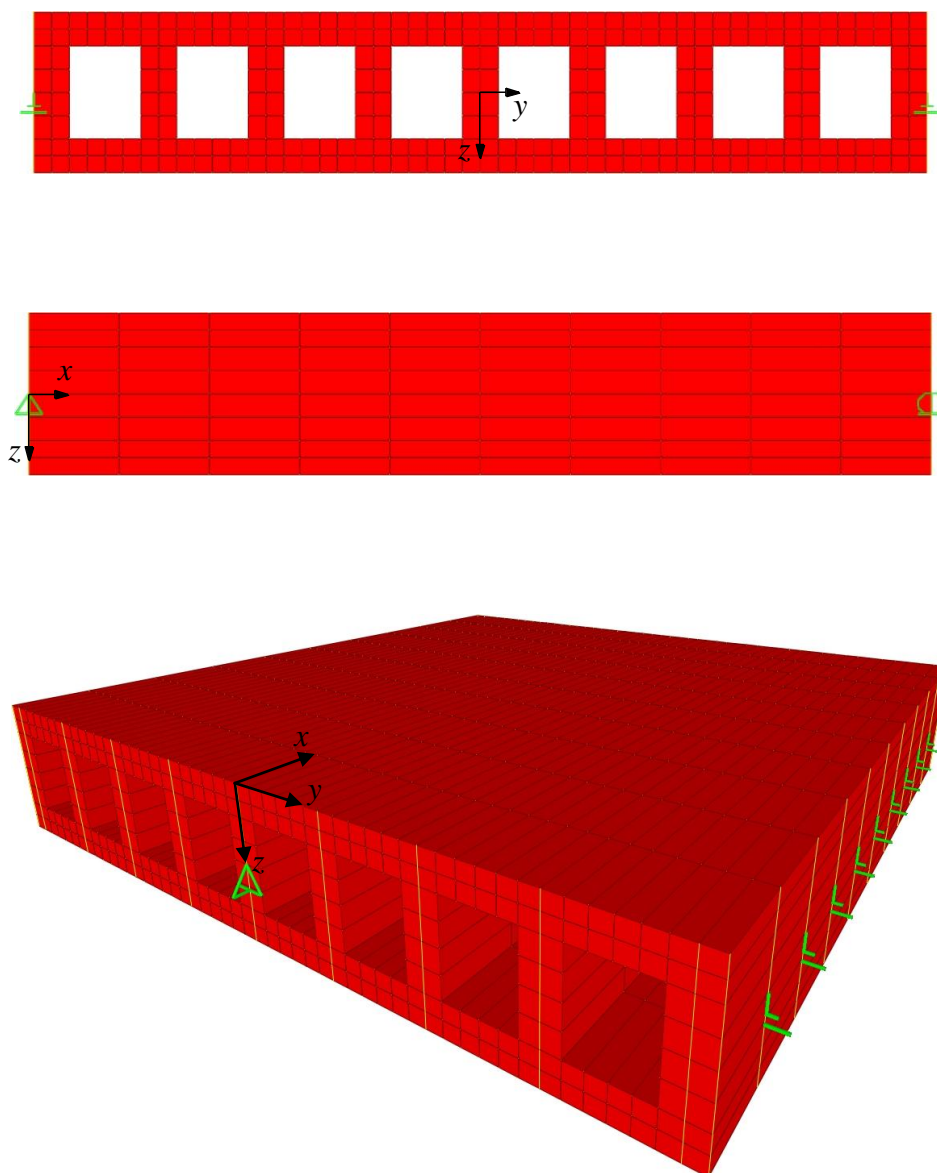


Figura 3.12 – Flexão segundo x. Sistema de apoios.

Desta forma, garante-se uma flexão cilíndrica do painel de laje e o conhecimento dos momentos de fixação no sentido transversal da laje.

O facto de o programa de cálculo automático utilizado suportar apenas nós com 3 graus de liberdade (u_1 , u_2 e u_3), obrigou a que se tivesse de utilizar artifícios de forma a ser possível a aplicação de momentos ao modelo. Para isso, foi criado um Material Rígido (MR) com um módulo de elasticidade 100.000 vezes superior ao do betão e utilizaram-se barras com uma secção de $1 \times 1 \text{ m}^2$ de MR dispostas estrategicamente permitindo assim aplicar as cargas desejadas e assegurar a melhor distribuição possível das mesmas.

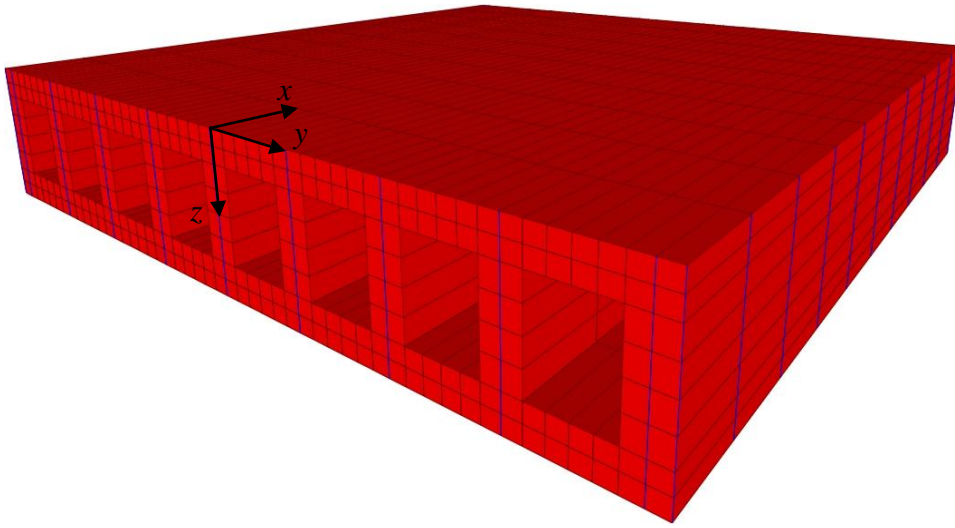


Figura 3.13 – Disposição das barras de MR no modelo.

Sendo impossível a aplicação de um momento distribuído como seria desejável, foram aplicados momentos concentrados que simularam com o máximo rigor possível o momento distribuído.

Desta forma, garantiram-se as seguintes condições

$$\frac{\sum M_i}{b} = 1kN.m/m \quad (3.53)$$

e

$$\frac{M_i}{b_i} = C^{te} \quad (3.54)$$

onde M_i representa cada um dos momentos aplicados, b_i a respectiva largura de influência e B a largura total da laje.

Destas condições resulta que devem ser aplicados nove momentos, um por nervura, tendo os de extremidade metade da intensidade dos restantes, pois a sua largura de influência é metade das restantes. Tem-se portanto:

$$M_{extremidade} = 0,0703125kN.m \quad (3.55)$$

$$M_{entremedio} = 0,140625kN.m \quad (3.56)$$

Concretizando, fica-se com o seguinte modelo final:

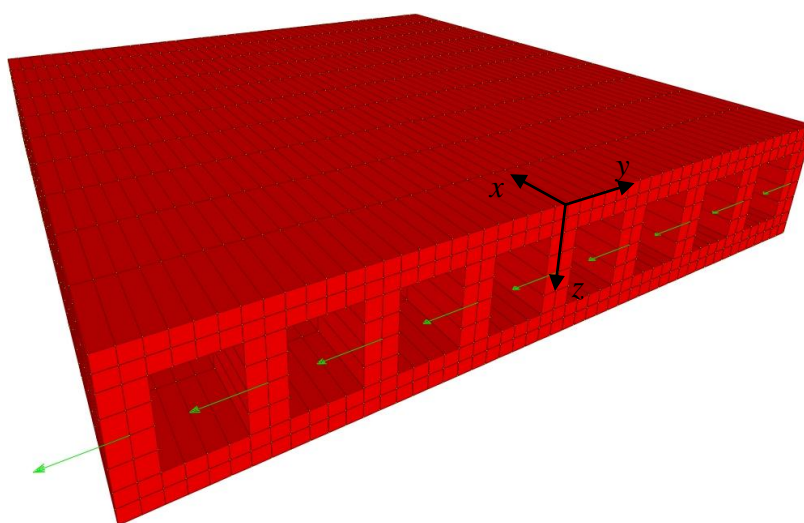


Figura 3.14 – Flexão segundo x. Momentos aplicados no modelo.

Finalizado o modelo, procedeu-se então à sua análise.

Primeiramente verificou-se se a deformada global correspondia ao previsto, se as reacções verticais eram nulas e se os restantes esforços se distribuíam simetricamente nas duas direcções.

Constatou-se que a deformada é realmente cilíndrica, pois os deslocamentos relativos entre os diversos pontos pertencentes a um qualquer plano zy apresentaram valores cerca de 1000 vezes inferiores ao deslocamento global.

As reacções verticais tinham uma grandeza da ordem dos $3 \times 10^{-6} kN$, o que se pode considerar desprezável quando comparada com a ordem de grandeza das forças aplicadas, verificando-se também a dupla simetria dos esforços.

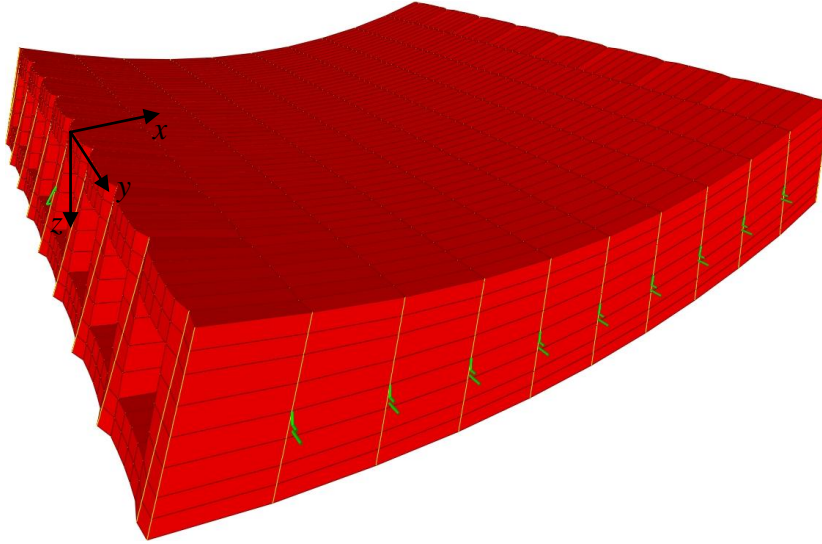


Figura 3.15 – Flexão segundo x . Deformada resultante da análise do modelo.

Verificada a validade do modelo ensaiado, procedeu-se então à análise dos resultados obtidos e respectivas conclusões.

Serve este modelo para caracterizar a laje segundo a direcção do seu eixo longitudinal, ou seja, segundo o eixo x ; logo, consideram-se as equações

$$m_x = -\frac{EI_y}{1-C_v\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{C_v} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.57)$$

$$m_y = -\frac{EI_x}{1-C_v\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.58)$$

onde

$$D_{xy} = \frac{EI_y \nu}{C_v(1-C_v\nu^2)} \quad (3.58)$$

$$D_{yx} = \frac{EI_x \nu}{1-C_v\nu^2} \quad (3.60)$$

Desta forma, pode calcular-se os valores das rigidezes D_x e D_{xy} .

Como se trata de uma flexão cilíndrica, só existe flexão segundo x , logo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.61)$$

Logo,

$$m_x = D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.62)$$

$$m_y = D_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.63)$$

Sabendo que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{R} \quad (3.64)$$

E aplicando o procedimento descrito acima, pode calcular-se os valores pretendidos.

São então necessários os valores do deslocamento vertical em 3 pontos distintos da linha média da laje ao longo do seu eixo longitudinal. Estes valores foram retirados directamente do programa como se mostra no seguinte exemplo:

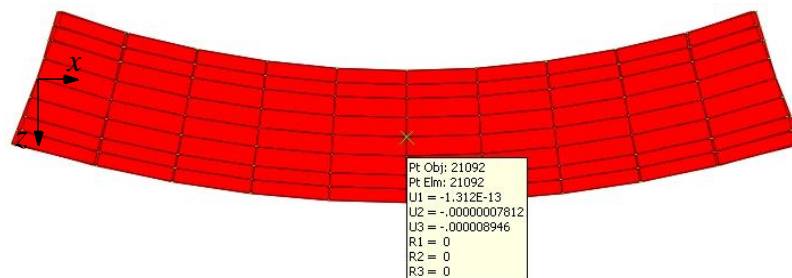


Figura 3.16 – Flexão segundo x. Deformada em corte para leitura dos pontos notáveis

Foram utilizados pontos mais próximos da zona central para que o efeito das cargas localizadas aplicadas nas extremidades não interferisse nos resultados.

Deste modo foram usados os pontos indicados na tabela seguinte.

Tabela 3.1 – Deslocamentos verticais dos pontos notáveis da deformada por flexão segundo x.

Ponto	$x [m]$	$w [m]$
1	0,3375	7,542E-06
2	0,4500	8,597E-06
3	0,5625	8,946E-06
4	0,6750	8,597E-06
5	0,7875	7,542E-06

Como se pode constatar, são os cinco pontos centrais, sendo o ponto 3 o centro geométrico do painel de laje e por isso mesmo, o que tem o maior deslocamento vertical do conjunto considerado. Pode também constatar-se a simetria dos deslocamentos.

Aplicando então o procedimento descrito no início no capítulo, usando os pontos 1, 3 e 5, têm-se

$$f = z_3 - z_1 \quad (3.65)$$

$$L = x_5 - x_1 \quad (3.66)$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{2f}{f^2 + \frac{L^2}{4}} \quad (3.67)$$

que substituindo pelos valores numéricos

$$f = 1,404 \times 10^{-6} m \quad (3.68)$$

$$L = 0,45m \quad (3.69)$$

$$\frac{1}{R_x} = 5,547 \times 10^{-5} m^{-1} \quad (3.70)$$

e aplicando o mesmo procedimento aos pontos 2, 3 e 4

$$f = 3,49 \times 10^{-7} m \quad (3.71)$$

$$L = 0,225m \quad (3.72)$$

$$\frac{1}{R_x} = 5,515 \times 10^{-5} m^{-1} \quad (3.73)$$

Os dois resultados podem considerar-se correctos, pois o erro é insignificante. De qualquer forma, utilizar-se-á o valor médio em todos os cálculos subsequentes.

$$\frac{1}{R_x} = \frac{5,547 \times 10^{-5} + 5,515 \times 10^{-5}}{2} = 5,531 \times 10^{-5} m^{-1} \quad (3.74)$$

aplicando a expressão

$$M_x = b \cdot D_x \frac{1}{R_x} \quad (3.75)$$

e evidenciando a rigidez

$$b \cdot D_x = \frac{M_x}{\frac{1}{R_x}} \quad (3.76)$$

Sendo D_x uma rigidez por unidade de largura, e sabendo que o momento total aplicado é definido por $M_x = m_x b$, onde b é a largura do painel de laje considerado, resulta

$$b \cdot D_x = \frac{b \cdot m_x}{\frac{1}{R_x}} \quad (3.77)$$

Substituindo então pelos valores numéricos chega-se a um valor de

$$D_x = 18080,50 \text{ kN.m}^2/\text{m} \quad (3.78)$$

Para o elemento HCS50, chega-se a um valor de

$$D_x = 210748,16 \text{ kN.m}^2/\text{m} \quad (3.79)$$

3.3.2 DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DE FLEXÃO SEGUNDO Y

Procedeu-se de forma análoga para determinar a rigidez de flexão no sentido transversal do painel de laje, ou seja, na direcção y. Utilizou-se um modelo com as mesmas características do anterior invertendo os locais da aplicação dos apoios e das cargas.

Como referido, os apoios verticais estão agora alinhados segundo o eixo y, estando a laje impedida de rodar em torno deste mesmo eixo pelos encastramentos deslizantes colocados nas facetas que lhe são paralelas.

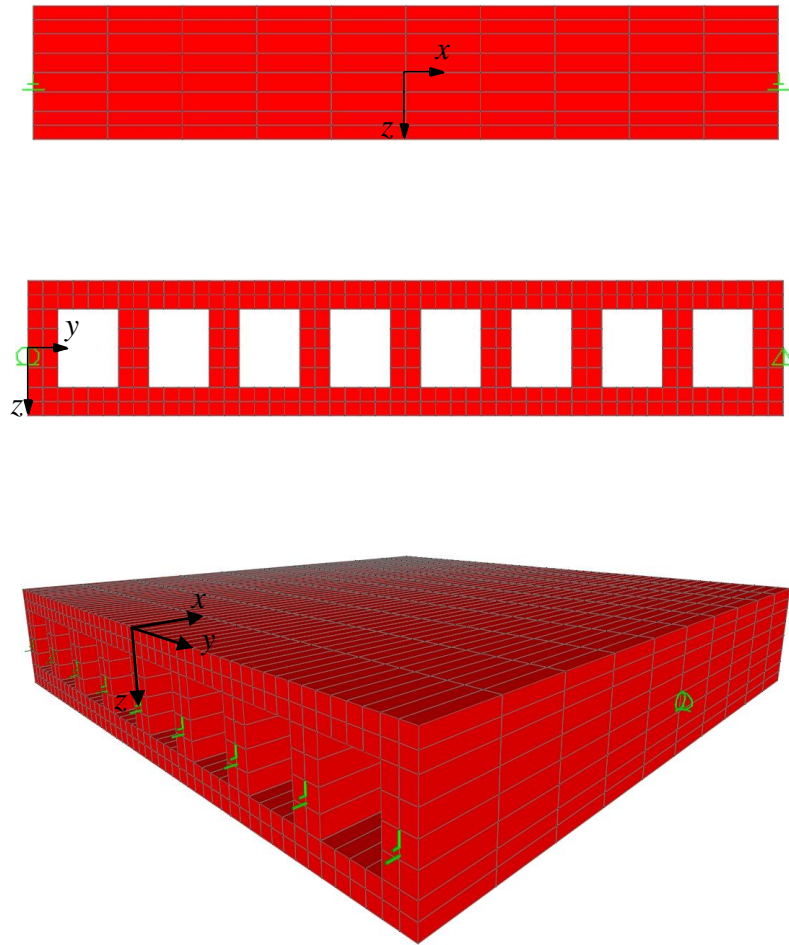


Figura 3.17 – Flexão segundo y. Sistema global de apoios.

Estando nas mesmas condições de impossibilidade de aplicar cargas distribuídas, recorreu-se novamente às supracitadas barras de MR para distribuir da melhor forma as cargas concentradas que obedeceram às premissas

$$\frac{\sum M_i}{b} = 1kN.m/m \quad (3.80)$$

e

$$\frac{M_i}{b_i} = C^{te} \quad (3.81)$$

onde M_i representa cada um dos momentos aplicados, b_i a respectiva largura de influência e B a largura total da laje.

Neste caso foram aplicados onze momentos, tendo os de extremidade metade da intensidade dos restantes, pois, mais uma vez, a sua largura de influência é metade das restantes:

$$M_{extremidade} = 0,5625kN.m \quad (3.82)$$

$$M_{entremedio} = 0,1125kN.m \quad (3.83)$$

resultando

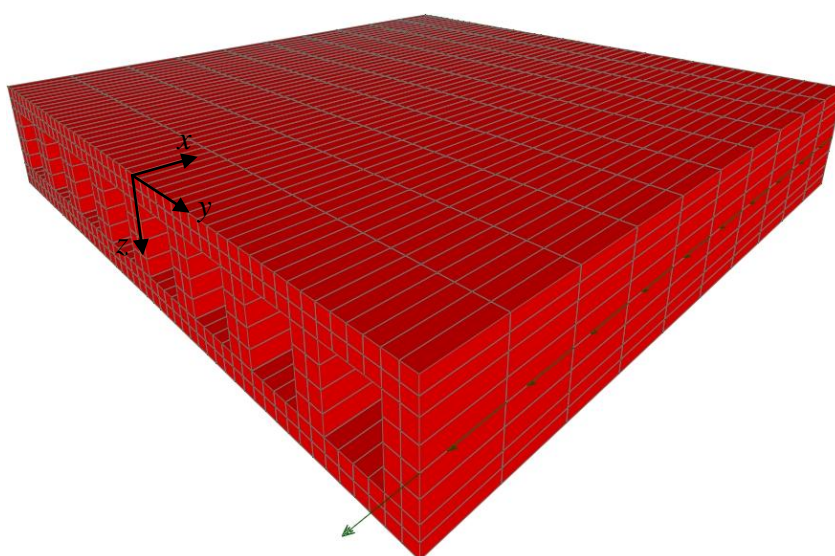


Figura 3.18 – Flexão segundo y. Momentos aplicados no modelo.

Uma vez analisado o modelo, verificou-se novamente se a deformada global correspondia ao previsto, se as reacções verticais eram nulas e se os restantes esforços se distribuíam simetricamente nas duas direcções ortogonais.

Estes pontos foram verificados, pois os deslocamentos relativos entre os diversos pontos pertencentes a um qualquer plano zy apresentaram valores cerca de 1000 vezes inferiores ao deslocamento global e as reacções verticais apresentaram uma grandeza de ordem igual ao painel anteriormente ensaiado, verificando-se novamente que os esforços eram bissimétricos.

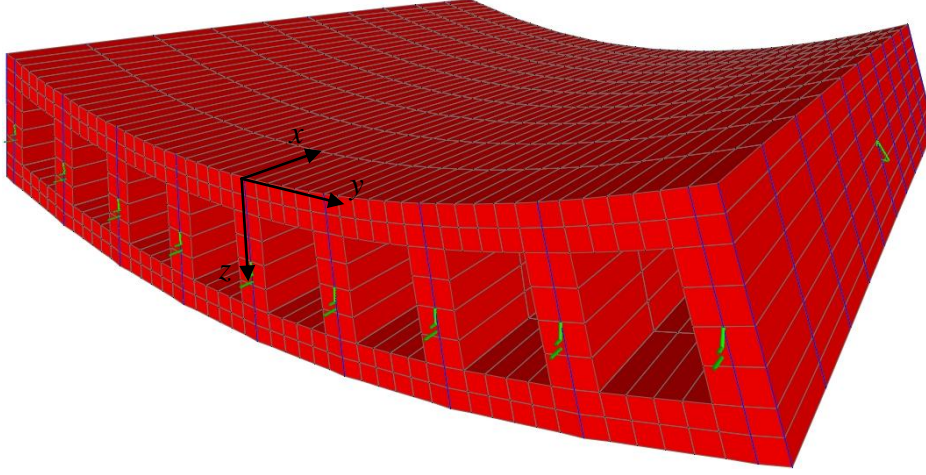


Figura 3.19 – Flexão segundo y. Deformada resultante da análise do modelo.

Verificada a validade do modelo ensaiado, analisaram-se os resultados obtidos.

Desta feita, partiu-se das mesmas expressões usadas para caracterizar a laje no sentido perpendicular ao considerado.

$$m_x = -\frac{EI_y}{1-C_v\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{C_v} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.84)$$

$$m_y = -\frac{EI_x}{1-C_v\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.85)$$

onde

$$D_{xy} = \frac{EI_y \nu}{C_v(1-C_v\nu^2)} \quad (3.86)$$

$$D_{yx} = \frac{EI_x \nu}{1-C_v\nu^2} \quad (3.87)$$

Como anteriormente, trata-se de uma flexão cilíndrica mas, neste caso, só existe flexão segundo y, donde se conclui que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.88)$$

logo,

$$m_x = D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.89)$$

$$m_y = D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.90)$$

sabendo que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{R_y} \quad (3.91)$$

Aplicou-se o mesmo procedimento.

Retiraram-se do programa de Elementos Finitos os deslocamentos verticais em 5 pontos distintos da linha média da laje ao longo do seu eixo transversal segundo o seguinte exemplo

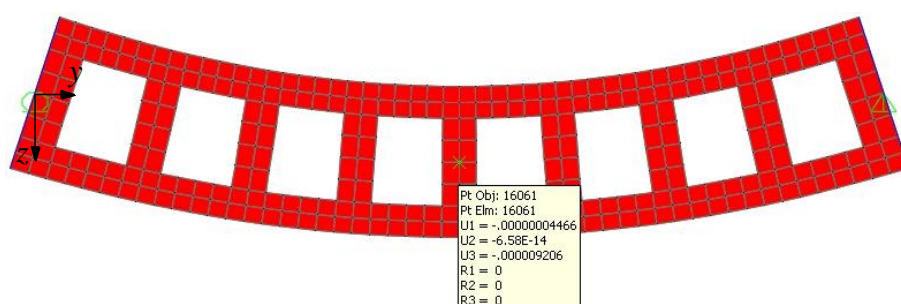


Figura 3.20 – Flexão segundo y. Deformada em corte para leitura dos pontos notáveis

Novamente, utilizaram-se os pontos mais próximos da zona central para que o efeito das cargas localizadas aplicadas nas extremidades não interferisse nos resultados.

Tabela 3.2 – Deslocamentos verticais dos pontos notáveis da deformada por flexão segundo y.

Ponto	y [m]	w [m]
1	0,2925	7,068E-06
2	0,4275	8,672E-06
3	0,5625	9,206E-06
4	0,6975	8,672E-06
5	0,8325	7,068E-06

Deste modo foram usados os pontos indicados na Tabela 3.2 que correspondem novamente aos cinco pontos centrais, sendo o ponto 3 o centro geométrico do painel de laje e por isso mesmo, o que tem o maior deslocamento vertical do conjunto considerado. Pode também verificar-se, mais uma vez, a simetria dos deslocamentos.

Repetindo o procedimento e usando os pontos 1, 3 e 5, tem-se

$$f = z_3 - z_1 \quad (3.92)$$

$$L = y_5 - y_1 \quad (3.93)$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{2f}{f^2 + \frac{L^2}{4}} \quad (3.94)$$

Que substituindo pelos valores numéricos

$$f = 2.138 \times 10^{-6} m \quad (3.95)$$

$$L = 0.54 m \quad (3.96)$$

$$\frac{1}{R_y} = 5.866 \times 10^{-5} m^{-1} \quad (3.97)$$

Aplicando o mesmo procedimento aos pontos 2, 3 e 4

$$f = 5.34 \times 10^{-7} m \quad (3.98)$$

$$L = 0.27 m \quad (3.99)$$

$$\frac{1}{R_y} = 5.860 \times 10^{-5} m^{-1} \quad (3.100)$$

Verifica-se novamente a veracidade dos resultados obtidos, pela proximidade dos resultados. No entanto, utilizar-se-á futuramente o valor médio para se obter maior precisão.

$$\frac{1}{R_y} = \frac{5.866 \times 10^{-5} + 5.860 \times 10^{-5}}{2} = 5.863 \times 10^{-5} m^{-1} \quad (3.101)$$

Aplicando a expressão análoga da equação (3.77)

$$b \cdot D_y = \frac{b \cdot m_y}{\frac{1}{R_y}} \quad (3.102)$$

Substituindo pelos valores numéricos chega-se a

$$D_y = 17056,63 \text{ kN.m}^2/\text{m} \quad (3.103)$$

Para o elemento HCS50, tem-se

$$D_y = 212987,74 \text{ kN.m}^2/\text{m} \quad (3.104)$$

3.4 DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DE CORTE

Estando a laje completamente caracterizada relativamente às propriedades de flexão nas direcções principais, passou-se à caracterização da rigidez de corte segundo os mesmos eixos. Para tal, recorreu-se novamente a um modelo de cálculo que permitisse controlar as variáveis necessárias ao cálculo das grandezas em questão.

Considerou-se um elemento encastrado numa das extremidades e impedido de rodar na extremidade oposta, local onde foi aplicada uma carga concentrada (Figura 3.21 a)). Desta forma, obtém-se uma deformada mista, pois existem parcelas correspondentes tanto à flexão como ao corte, como mostram os diagramas de esforços da figura seguinte (Figuras 3.21 b), 3.21 c) e 3.21 d)).

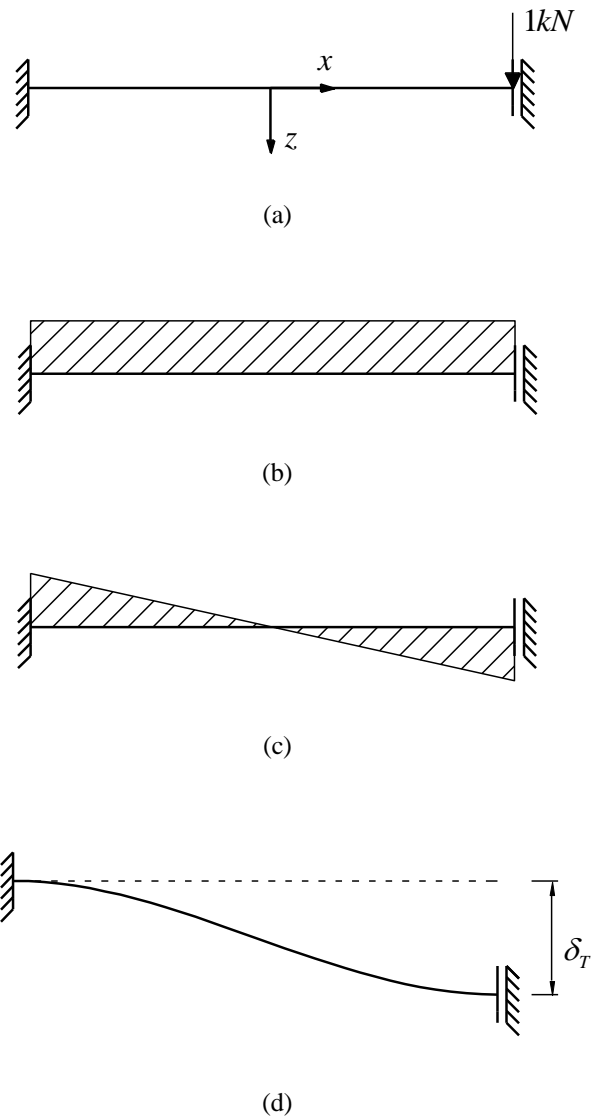


Figura 3.21 – Corte segundo x . (a) Modelo de ensaio; (b) Diagrama de esforço transversor; (c) Diagrama de momento flector; (d) Deformada

Desta feita, deve separar-se cada um dos efeitos pois neste caso, apenas interessa a deformação por corte.

Sabe-se que o deslocamento total (δ_T) na extremidade móvel do painel de laje é dado pela soma dos deslocamentos devidos a cada uma das acções, ou seja,

$$\delta_T = \delta_M + \delta_V \quad (3.105)$$

onde δ_M e δ_V são os deslocamentos devido à flexão e ao corte, respectivamente.

Por outro lado,

$$\delta = \frac{F}{K} \quad (3.106)$$

Onde F é a força aplicada, δ o deslocamento e K a rigidez.

Substituindo,

$$\frac{F}{K_T} = \frac{F}{K_M} + \frac{F}{K_V} \quad (3.107)$$

Onde F é a força aplicada, K_T a rigidez total e K_M e K_V são, respectivamente, as rigidezes de flexão e de corte.

Evidenciando a parcela desejada, tem-se

$$K_V = \frac{K_M K_T}{K_M - K_T} \quad (3.108)$$

Onde, como se sabe da Resistência de Materiais,

$$K_M = \frac{12EI}{L^3} \quad (3.109)$$

Sendo EI a rigidez de flexão do elemento na direcção considerada e L o vão.

3.4.1 DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DE CORTE SEGUNDO X

Passou-se então à modelação do problema no programa de elementos finitos comercial SAP2000®.

Utilizou-se o painel de laje no qual se estudou a flexão longitudinal, pois a análise de convergência mostrou que o refinamento dos sólidos era suficiente, dada a pouca complexidade da deformada.

Recorreu-se uma vez mais ao Material Rígido (MR) para garantir a eficiência dos apoios utilizados e para garantir uma melhor distribuição das cargas pela superfície de aplicação.

Implementaram-se encastramentos na faceta do lado direito e encastramentos deslizantes na faceta esquerda. Para garantir que o ponto de referência não se alterava, foram colocados apoios impedidos de se deslocar verticalmente nos pontos de interface entre o betão e o MR. As cargas foram aplicadas nos encastramentos deslizantes.

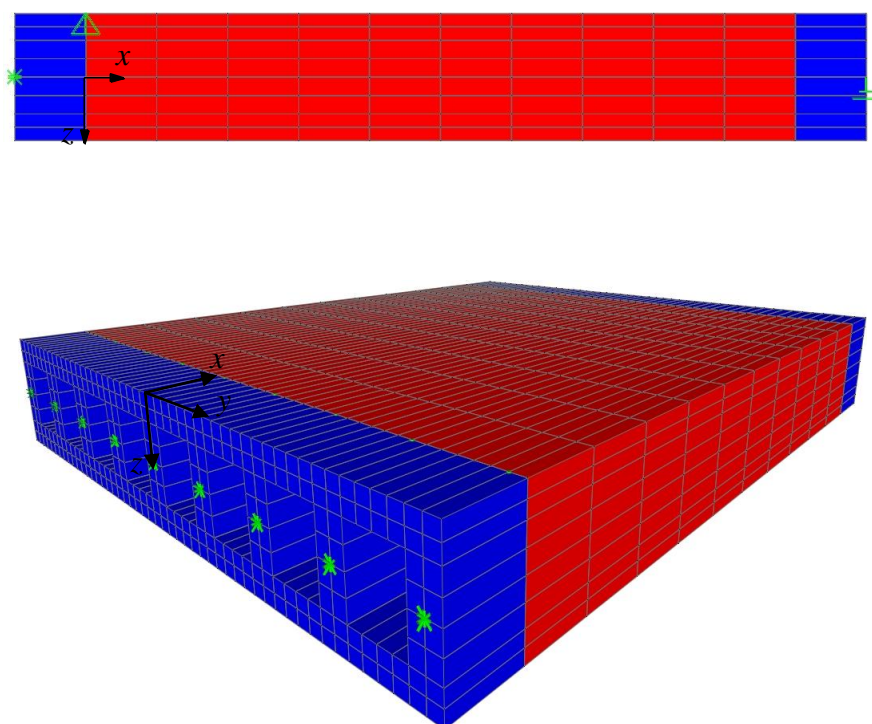


Figura 3.22 – Corte segundo x. Sistema de apoios.

A carga aplicada totalizou 1kN, distribuído por forças pontuais aplicadas por áreas de influência, como se procedeu anteriormente, tendo as cargas de extremidade metade do valor das restantes.

Findada a análise, fizeram-se as normais verificações para confirmar a validade dos resultados obtidos.

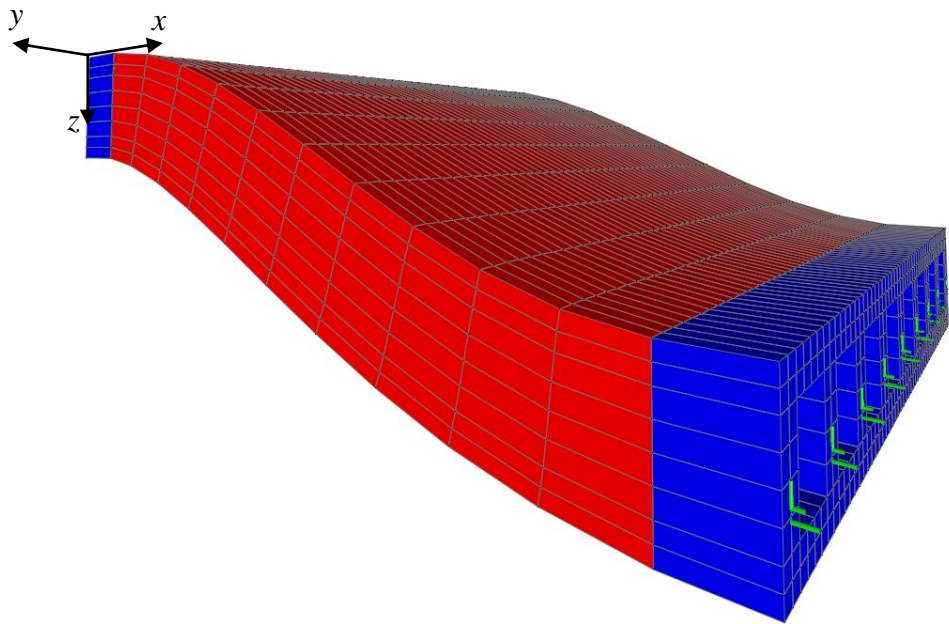


Figura 3.23 – Corte segundo x. Deformada resultante da análise do modelo.

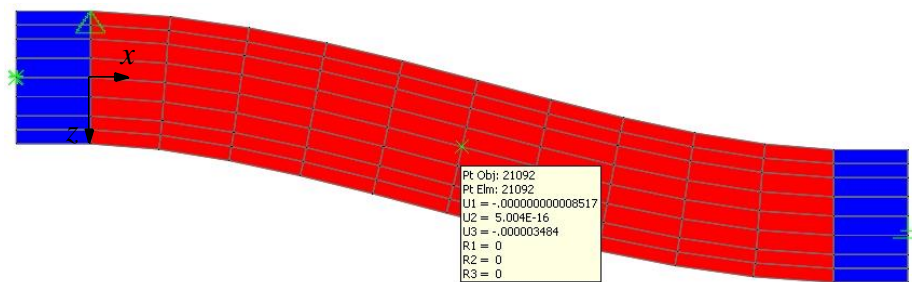


Figura 3.24 – Corte segundo x. Deformada em corte para leitura dos pontos notáveis

Foram tirados os valores para o deslocamento vertical de todos os pontos ao longo da linha média do painel de laje segundo o eixo x que são mostrados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Deslocamentos verticais dos pontos notáveis da deformada por corte segundo x .

<i>Secção</i>	<i>x [m]</i>	<i>w [m]</i>
1	0	0
2	0,1125	2,563E-07
3	0,2250	8,230E-07
4	0,3375	1,594E-06
5	0,4500	2,504E-06
6	0,5625	3,484E-06
7	0,6750	4,464E-06
8	0,7875	5,374E-06
9	0,9000	6,145E-06
10	1,0125	6,711E-06
11	1,1250	6,968E-06

Destes, apenas se justifica utilizar o valor correspondente ao ponto de aplicação das cargas, uma vez que este é o dado que permite calcular a rigidez total da laje.

$$K_T = \frac{V}{w} = \frac{1}{6.968 \times 10^{-6}} = 1.435 \times 10^5 \text{ kN/m} \quad (3.110)$$

Recorrendo ao valor de EI_x calculado anteriormente, tem-se

$$K_M = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \times 20339902.37}{1.125^3} = 1.714 \times 10^5 \text{ kN/m} \quad (3.111)$$

Substituindo agora (3.110) e (3.111) em (3.108), calcula-se facilmente a rigidez de corte da laje na direcção pretendida.

$$K_V = \frac{K_M K_T}{K_M - K_T} = \frac{1.714 \times 10^5 \times 1.435 \times 10^5}{1.714 \times 10^5 - 1.435 \times 10^5} = 8.812 \times 10^5 \text{ kN/m} \quad (3.112)$$

Para o elemento HCS50

$$K_V = 1,594 \times 10^6 \text{ kN/m} \quad (3.113)$$

Este resultado é numericamente igual a Gh' , onde G representa o módulo de distorção e h' a área de corte por unidade de largura.

Estes resultados fazem sentido, pois torna-se claro que a rigidez total teria de ser o valor mais baixo. Estas grandezas tornam-se mais fáceis de analisar se recorrermos à definição de flexibilidade, ou seja, a flexibilidade total é maior que as restantes isoladamente, a flexibilidade devido à flexão é da mesma ordem de grandeza da total e a flexibilidade de corte é muito menor.

Conclui-se assim que a rigidez de corte assume um peso relativamente pequeno na direcção longitudinal do painel de laje.

3.4.2 DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DE CORTE SEGUNDO Y

Para a determinação da rigidez de corte segundo y usou-se um modelo análogo ao anterior, de onde resultou o esquema de apoios que se apresenta na Figura 3.25.

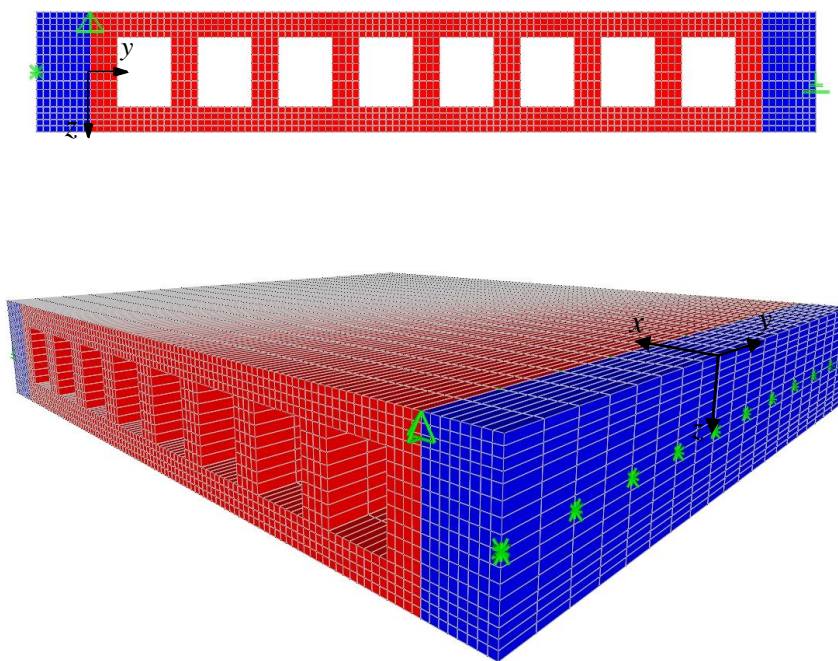


Figura 3.25 – Corte segundo y. Sistema de apoios.

A caracterização da rigidez de corte no sentido transversal da laje é relativamente complexa, dadas as características geométricas.

Procedeu-se à análise de convergência dos resultados dos elementos finitos de forma análoga à usada nos ensaios anteriores.

Neste caso, não se verificou a convergência dos resultados da análise por elementos finitos para um modelo de 3360 elementos como sucedeu nos casos anteriores. Para obter resultados com a precisão desejada, foi necessário refinar a malha de elementos finitos, aumentando progressivamente o número de elementos, até ser averiguada uma diferença considerada desprezável, o que aconteceu para um valor de 26.880 sólidos.

Foi utilizado um sistema de apoios e cargas com as mesmas características do anterior, mas desta vez, na direcção transversal (Figura 3.25).

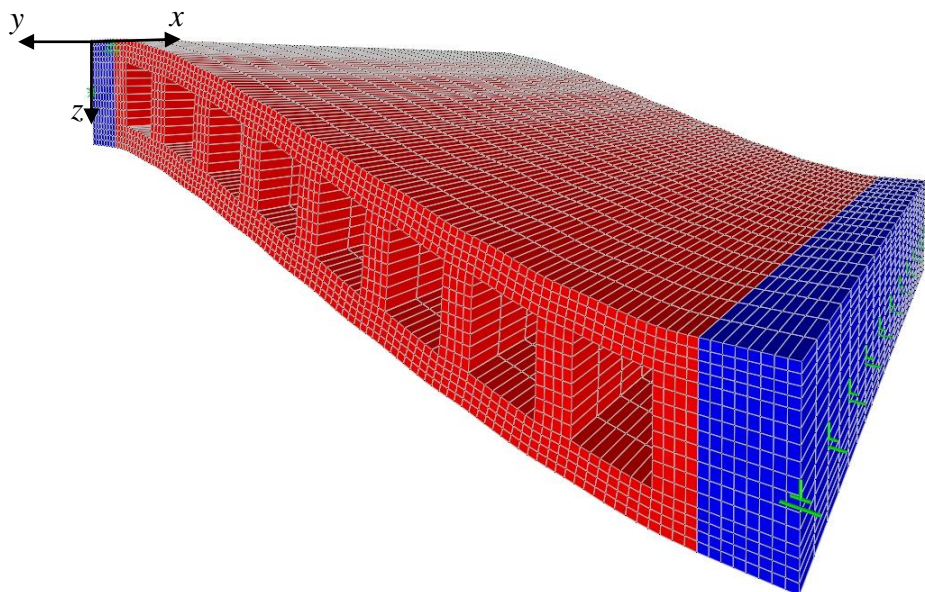


Figura 3.26 – Corte segundo y. Deformada resultante da análise do modelo.

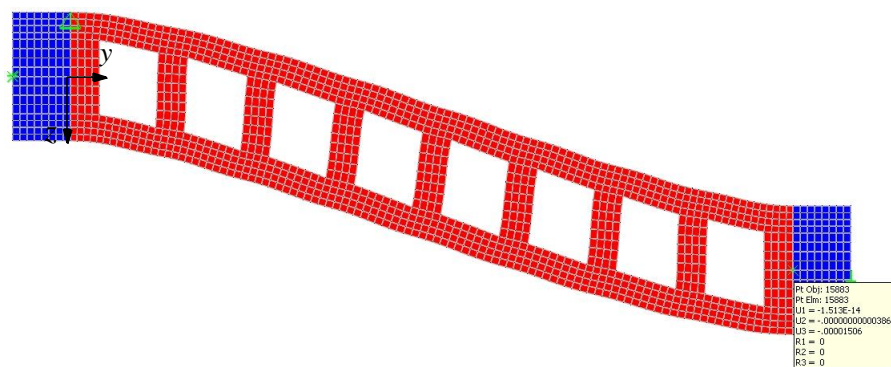


Figura 3.27 – Corte segundo y. Deformada em corte para leitura dos pontos notáveis

Findado o cálculo, tiraram-se os valores dos deslocamentos verticais dos pontos da linha média segundo o eixo y conforme mostra a Tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Deslocamentos verticais dos pontos notáveis da deformada por corte segundo y.

<i>Secção</i>	<i>x [m]</i>	<i>w [m]</i>
1	0,0000	0,000E-06
2	0,1575	1,284E-06
3	0,2925	3,201E-06
4	0,4275	5,434E-06
5	0,5625	7,817E-06
6	0,6975	1,020E-05
7	0,8325	1,243E-05
8	0,9675	1,434E-05
9	1,1250	1,506E-05

Repetiu-se o procedimento anterior para o cálculo da rigidez total, devido à flexão e devido ao corte. Tem-se portanto

$$K_T = \frac{V}{z} = \frac{1,125}{1,506 \times 10^{-5}} = 7,470 \times 10^4 \text{ kN/m} \quad (3.114)$$

$$K_M = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \times 19188128,94}{1,125^3} = 1,617 \times 10^5 \text{ kN/m} \quad (3.115)$$

$$K_V = \frac{K_M K_T}{K_M - K_T} = \frac{1,617 \times 10^5 \times 7,470 \times 10^4}{1,617 \times 10^5 - 7,470 \times 10^4} = 1,388 \times 10^5 \text{ kN/m} \quad (3.116)$$

Para o elemento HCS50, chega-se a

$$K_V = 7,874 \times 10^4 \text{ kN/m} \quad (3.117)$$

Conclui-se, observando os resultados, que, ao contrário do que acontece na direcção longitudinal, nesta situação a rigidez de corte tem a mesma ordem de grandeza da rigidez devida à flexão, o que confere uma grande importância a esta parcela.

Por observação da deformada, conseguem distinguir-se 3 fenómenos:

1. deformação por flexão devido ao alongamento global da lâmina superior e contracção global da lâmina inferior na primeira metade do painel e o inverso na segunda metade;
2. deformação por flexão de cada um dos troços que compõem a estrutura dos alvéolos;
3. deformação por corte das lâminas superior e inferior.

Destes, considerou-se que os dois últimos representam a deformação por corte da laje.

3.5 DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ DE TORÇÃO

Não foi possível calcular a rigidez de torção do painel de laje utilizando uma metodologia análoga às usadas anteriormente.

Devido à grande disparidade entre as rigidezes de flexão e de corte e a diferença de grandezas desta última nas duas direcções principais da laje, a resposta ao carregamento imposto para sujeitar a laje a um estado de torção pura, é fortemente influenciada, deixando de ter qualquer significado do ponto de vista do objectivo pretendido, uma vez que a deformação por corte não pode ser considerada desprezável.

Recorreu-se então à solução proposta por Ugural [7] para o cálculo da rigidez de torção em lajes ortotrópicas. Tem-se então que

$$G_{xy} = \frac{(1 - \sqrt{\nu_x \nu_y})}{2} \sqrt{D_x D_y} \quad (3.118)$$

com

$$\nu_y = \frac{D_{yx}}{D_y} \quad (3.119)$$

$$\nu_x = \frac{D_{xy}}{D_x} \quad (3.120)$$

Sabendo que D_{yx} e D_{xy} podem ser calculados da forma

$$D_{yx} = M_{y'} R_x \quad (3.121)$$

$$D_{xy} = M_{x'} R_y \quad (3.122)$$

Onde $M_{y'}$ e $M_{x'}$ são os momentos de reacção na direcção perpendicular à solicitação principal de flexão segundo a direcção x e y respectivamente e R_x e R_y são os raios de curvatura para o carregamento considerado.

Os valores de $M_{y'}$ e $M_{x'}$ obtêm-se somando as reacções nos encastramentos deslizantes dos modelos ensaiados à flexão.

Têm-se portanto os seguintes valores para as reacções nos encastramentos:

Tabela 3.5 – Reacções nos apoios encastrados para flexão segundo x .

<i>Encastramento</i>	<i>My' pontual (kN.m)</i>
1	0,01166
2	0,01953
3	0,01984
4	0,02467
5	0,01928
6	0,02286
7	0,01928
8	0,02467
9	0,01984
10	0,01953
11	0,01166
Σ	0,21282

Tabela 3.6 – Reacções nos apoios encastrados para flexão segundo y .

<i>Encastramento</i>	<i>Mx' pontual (kN.m)</i>
1	0,01641
2	0,02124
3	0,02180
4	0,02183
5	0,02184
6	0,02183
7	0,02180
8	0,02124
9	0,01641
Σ	0,18440

$$m_{y'} = \frac{\sum M_{y' pontual}}{L} = 0,189 \text{ kN.m/m} \quad (3.123)$$

$$m_{x'} = \frac{\sum M_{x' pontual}}{b} = 0,164 \text{ kN.m/m} \quad (3.124)$$

e consequentemente

$$D_{yx} = 3,420 \times 10^3 \text{ kN.m}^2/\text{m} \quad (3.125)$$

$$D_{xy} = 2,796 \times 10^3 \text{ kN.m}^2/\text{m} \quad (3.126)$$

obtendo-se assim os valores para os coeficientes de Poisson para as duas direcções

$$\nu_y = \frac{D_{yx}}{D_y} = 0,200 \quad (3.127)$$

$$\nu_x = \frac{D_{xy}}{D_x} = 0,155 \quad (3.128)$$

Estão reunidas condições para calcular o valor de G_{xy} . Recorrendo à expressão (3.118) e substituindo os valores numéricos, chega-se a

$$G_{xy} = \frac{(1 - \sqrt{\nu_x \nu_y})}{2} \sqrt{D_x D_y} = 7,234 \times 10^3 \text{ kN.m}^2/\text{m} \quad (3.129)$$

Para o elemento HCS50 tem-se

$$G_{xy} = 8,318 \times 10^4 \text{ kN.m}^2/\text{m} \quad (3.130)$$

Está assim completa a caracterização mecânica dos painéis de laje considerados.

3.6 CARACTERIZAÇÃO EXPEDITA

O cálculo das características mecânicas da laje é uma tarefa que, não sendo muito difícil, é morosa e trabalhosa, pelo que não é muito prático o seu uso para fins correntes. Posto isto, tentou encontrar-se uma forma expedita que permitisse calcular estas características sem recorrer à análise numérica pelo método dos elementos finitos.

3.6.1 DETERMINAÇÃO EXPEDITA DA RIGIDEZ DE FLEXÃO SEGUNDO X

O cálculo da rigidez de flexão segundo o eixo longitudinal das nervuras não é mais do que o produto do momento de inércia da secção transversal da laje pelo módulo de Young do betão utilizado.

$$D_x = \frac{I_x E}{1 - \nu^2} \quad (3.131)$$

Considerando os modelos HCS20 e HCS50, calculando os momentos de inércia pelas suas geometrias e tendo em conta as propriedades usadas no modelo numérico ($E = 20\text{GPa}$ e $\nu = 0,2$), chegam-se aos resultados apresentados na tabela seguinte:

Tabela 3.7 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de flexão segundo x

	$I_x [m^4/m]$	$D_x [kN.m^2/m]$	δ
HCS20	$5,834 \times 10^{-4}$	18231,83	0,8%
HCS50	$6,950 \times 10^{-3}$	217180,04	1,9%

onde δ é a diferença percentual obtida comparando o método numérico ao método expedito

$$\delta = \frac{D_{x,numérico} - D_{x,expedito}}{D_{x,numérico}} \quad (3.132)$$

Pela pouca significância dos erros relativos obtidos, pode concluir-se que a aproximação é válida.

3.6.2 DETERMINAÇÃO EXPEDITA DA RIGIDEZ DE FLEXÃO SEGUNDO Y

De forma análoga, pode concluir-se que a rigidez de flexão no sentido perpendicular às nervuras é dado por

$$D_y = \frac{I_y E}{1 - \nu^2} \quad (3.133)$$

Considerando que a secção se resume à lâmina superior e inferior, tem-se o respectivo valor do momento de inércia e rigidez, tendo em conta as propriedades usadas no modelo numérico ($E = 20GPa$ e $\nu = 0,2$). Os resultados são apresentados na tabela seguinte:

Tabela 3.8 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de flexão segundo y

	$I_y [m^4/m]$	$D_y [kN.m^2/m]$	δ
HCS20	$5,366 \times 10^{-4}$	16768,50	1,7%
HCS50	$5,579 \times 10^{-3}$	180218,27	3,4%

onde δ é a diferença percentual obtida comparando o método numérico ao método expedito

$$\delta = \frac{D_{x,numérico} - D_{x,expedito}}{D_{x,numérico}} \quad (3.134)$$

Pode novamente concluir-se que a aproximação é válida.

3.6.3 DETERMINAÇÃO EXPEDITA DA RIGIDEZ DE CORTE SEGUNDO X

O cálculo da rigidez de corte segundo o eixo longitudinal das nervuras é relativamente simples, pois a área de corte da secção é conhecida. Sabe-se da Resistência de Materiais que a área de corte deste tipo de elementos, é igual à área das almas:

$$A_x^* = \frac{A_{almas}}{b} \quad (3.135)$$

Logo, sabendo que a rigidez de corte por unidade de comprimento pode ser dada pela expressão

$$K_{Vx} = GA_x^* \quad (3.136)$$

Considerando o módulo de distorção utilizado no modelo

$$G = 12.5 \text{ GPa} \quad (3.137)$$

tem-se

Tabela 3.9 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de corte segundo x

	$A_x^* [m^2/m]$	$K_{Vx} [kN/m]$	δ
HCS20	0,072	$9,00 \times 10^5$	2,1%
HCS50	0,126	$1,571 \times 10^6$	1,4%

onde δ é a diferença percentual obtida comparando o método numérico ao método expedito

$$\delta = \frac{K_{Vx,numérico} - K_{Vx,expedito}}{K_{Vx,numérico}} \quad (3.138)$$

verificando-se mais uma vez a validade da aproximação.

3.6.4 DETERMINAÇÃO EXPEDITA DA RIGIDEZ DE FLEXÃO SEGUNDO Y

O caso particular da rigidez de corte no sentido perpendicular às nervuras apresenta alguma complexidade no seu cálculo por força dos diversos fenómenos que se fazem notar na deformada. Como se constatou anteriormente, a peça apresenta uma deformada composta principalmente por 3 componentes: deformação por flexão devido ao alongamento global da lâmina superior e contracção global da lâmina inferior na primeira metade do painel e o inverso na segunda metade; deformação por flexão de cada um dos troços que compõem a estrutura dos alvéolos; deformação por corte das lâminas superior e inferior.

É portanto necessário recorrer a um modelo simples que consiga reproduzir esta deformada.

Isolou-se um alvéolo do painel de laje e considerou-se o mesmo como um corpo livre sujeito ao carregamento em questão.

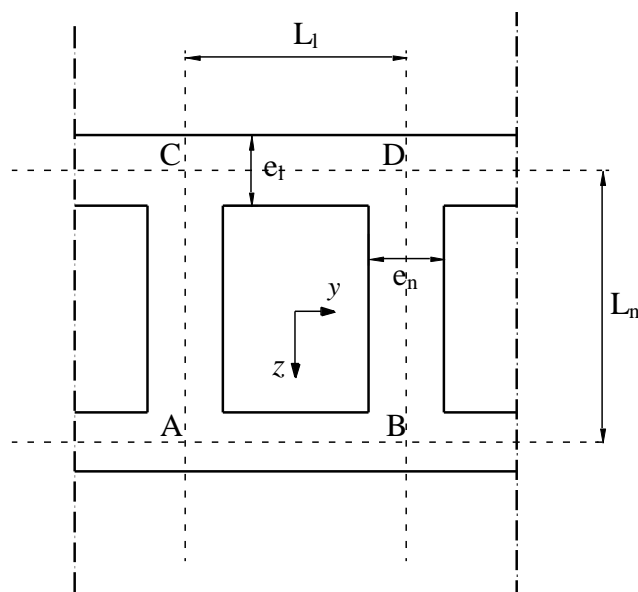


Figura 3.28 – Fração de painel de HCS.

Numa zona afastada dos bordos da laje, a rotação dos nós A, B, C e D pode considerar-se livre, pois a restrição de rotação dos nós das laterais já não se faz sentir.

Consequentemente, adoptou-se o seguinte modelo:

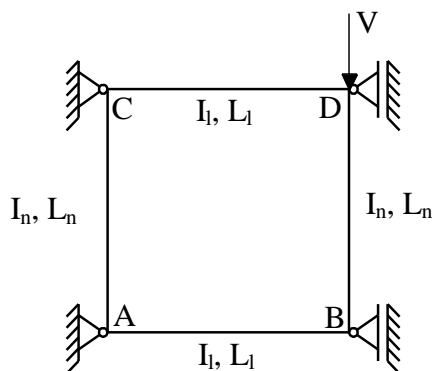


Figura 3.29 – Sistema aproximado de um alvéolo sujeito ao corte.

onde I_n e I_l são os momentos de inércia das nervuras e das lâminas, respectivamente, logo,

$$I_{n,red} = \frac{I_n}{2} = \frac{e_n^3 b}{24} \quad (3.139)$$

$$I_l = \frac{e_l^3 b}{12} \quad (3.140)$$

A redução do primeiro parâmetro deve-se à simplificação feita no modelo, como acontece normalmente com os elementos coincidentes com os eixos de simetria. Os esforços resultantes desta análise têm a configuração esperada, assim como a deformada, conforme se observa nas Figuras 3.30 e 3.31, respectivamente.

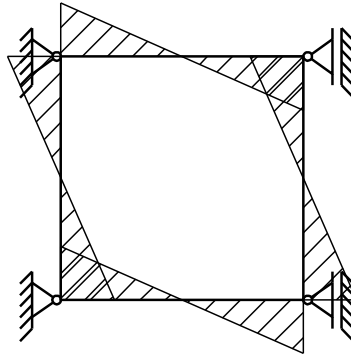


Figura 3.30 – Diagrama de momentos flectores no alvéolo devidos à força de corte aplicada.

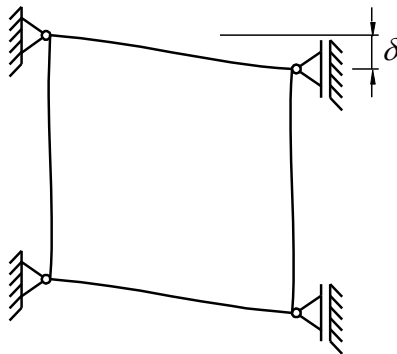


Figura 3.31 – Deformada do alvéolo resultante da força de corte aplicada.

Pelo modelo, observa-se que existem dois eixos de simetria que podem ser aproveitados para reduzir e simplificar ainda mais o esquema utilizado resultando o seguinte sistema equivalente.

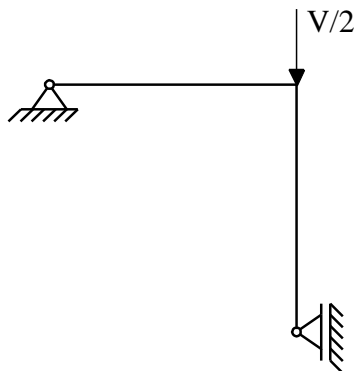


Figura 3.32 – Simplificação por simetria do sistema da Figura 3.29.

Observando os esforços e deformada resultantes, é notória a validade das simplificações efectuadas.

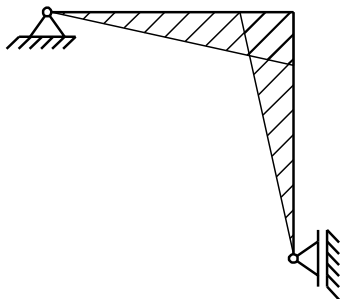


Figura 3.33 – Diagrama de momentos flectores resultantes do sistema simplificado.

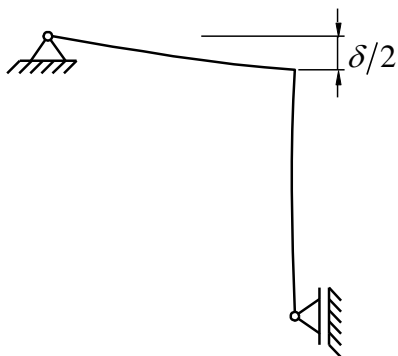


Figura 3.34 – Deformada resultante do modelo simplificado.

Consequentemente, a tarefa de calcular a rigidez deste sistema estrutural torna-se significativamente mais fácil.

Como a rigidez que se pretende calcular é apenas segundo um grau de liberdade, recorreu-se ao Método das Forças.

Resulta então:

$$\delta = \frac{1}{E} \int \left(\frac{M_l^2}{I_l} + \frac{M_n^2}{I_{n,red}} \right) \partial L \quad (3.141)$$

As características presentes introduzem uma dificuldade adicional porque a dimensão dos nós não é desprezável quando comparada com a dimensão dos elementos.

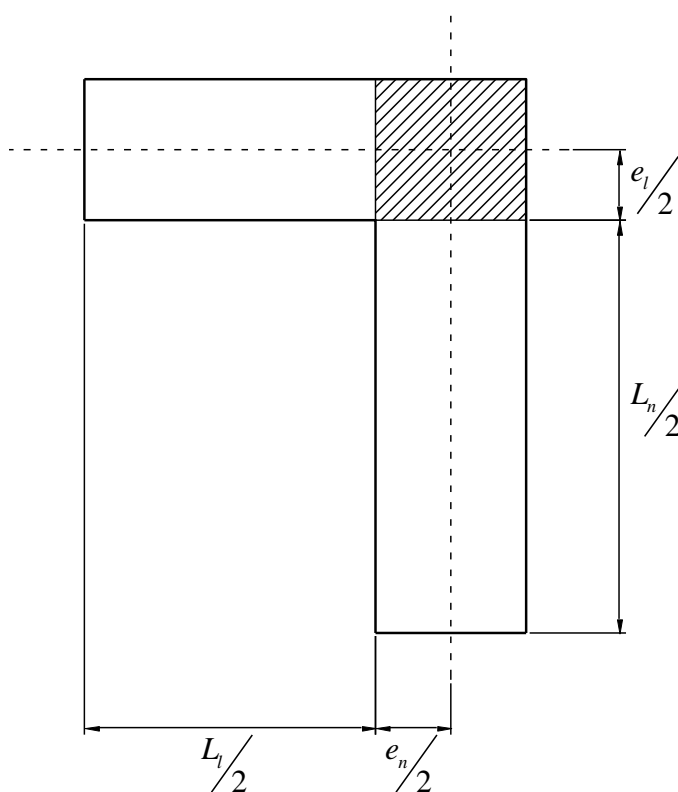


Figura 3.35 – Geometria do nó.

Teoricamente, a rigidez do nó varia entre a rigidez total, ou seja, todo o nó é completamente indeformável, e a rigidez igual à rigidez dos elementos, onde se admite a completa capacidade para sofrer deformações.

Na realidade, estes dois casos extremos não fazem sentido, sendo francamente mais realista considerar-se uma percentagem de rigidez para o nó. Este valor é definido pela relação entre comprimento considerado e o comprimento total do nó.

Tem-se portanto

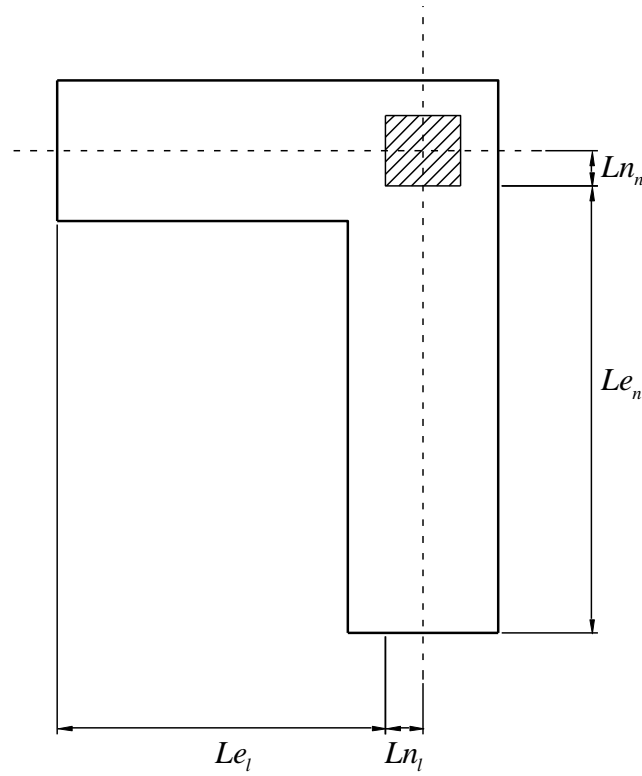


Figura 3.36 – Geometria efectiva do nó.

Onde

$$\alpha_l = \frac{2Ln_l}{e_n} \quad (3.142)$$

$$\alpha_n = \frac{2Ln_n}{e_l} \quad (3.143)$$

e

$$Le_l = \frac{L_l + (1 - \alpha_l)e_n}{2} \quad (3.144)$$

$$Le_n = \frac{L_n + (1 - \alpha_n)e_l}{2} \quad (3.145)$$

Sendo o núcleo do nó indeformável, a integração dos esforços será feita apenas nos comprimentos Le_l e Le_n como mostra a Figura 3.37 e, por isso, o valor dos mesmos depende destas distâncias, que para uma carga de valor unitário, conduz aos resultados.

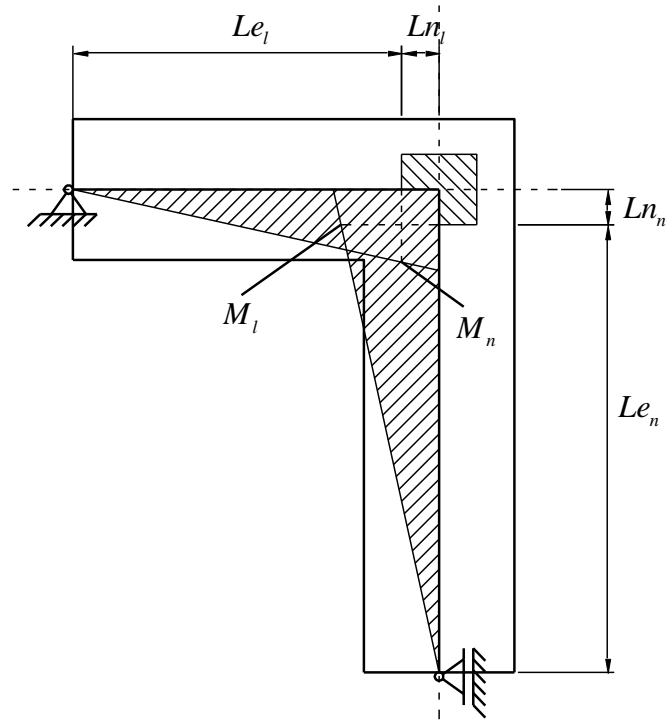


Figura 3.37 – Esforços actuantes na geometria efectiva do nó.

$$M_l = Le_l \quad (3.146)$$

$$M_n = \frac{(L_l + e_l)}{(L_n + e_n)} Le_n \quad (3.147)$$

Substituindo (3.146) e (3.147) em (3.141) e resolvendo, resulta

$$\delta = \frac{1}{3E} \left[\frac{Le_l^3}{I_l} + \frac{Le_n^3}{I_{n,red}} \left(\frac{L_l + e_l}{L_n + e_l} \right)^2 \right] = f_{a,1} \quad (3.148)$$

A *extrapolação* para a totalidade da estrutura resulta precisamente no resultado obtido anteriormente. Esta afirmação pode ser facilmente confirmada se se tiver em conta o raciocínio inverso ao seguido na simplificação pois deve duplicar-se a flexibilidade devido à simetria vertical e reduzir-se para metade devido à simetria horizontal.

Chegou-se desta forma ao valor da flexibilidade de um alvéolo que deve ser agora extrapolada para uma largura unitária que contemple n alvéolos, ou seja,

$$f_a = \frac{nf_{a,1}}{Cb} \quad (3.149)$$

Onde n é o número de alvéolos, b é a largura do painel de laje que se considerou unitária e C é o parâmetro de correcção que será referido posteriormente.

Definida a parcela relativa à flexão do alvéolo, passou-se à deformação por corte das lâminas superior e inferior. Esta não oferece dificuldades por demais, pois trata-se de uma deformação por corte simples de duas secções rectangulares em paralelo. Tem-se então para um comprimento unitário:

$$f_l = \frac{1}{GA^*} \quad (3.150)$$

onde, segundo a resistência de materiais,

$$A^* = \frac{5}{6} A \quad (3.151)$$

com

$$A = 2e_l \quad (3.152)$$

Estão assim definidos os parâmetros dos quais depende a flexibilidade ao corte da laje considerada. Resumindo,

$$f_a = \frac{n}{3EC} \left[\frac{Le_l^3}{I_l} + \frac{Le_n^3}{I_{n,red}} \left(\frac{L_l + e_n}{L_n + e_l} \right)^2 \right] \quad (3.153)$$

$$f_l = \frac{3}{5Ge_l} \quad (3.154)$$

A rigidez ao corte será

$$K_v = \frac{1}{f_a + f_l} \quad (3.155)$$

Quando existem poucos alvéolos na largura do painel de laje considerado, a influência dos nós de extremidade não é desprezável e, nestes casos, deve utilizar-se parâmetro de correcção C , que se define como

$$C = \frac{n + A_e - 2}{n - 1} \quad (3.156)$$

Esta expressão pode ser facilmente deduzida assumindo que cada painel de laje é constituído por dois sistemas distintos: os alvéolos de extremidade cujos nós periféricos estão impedidos de rodar, podendo os nós interiores rodar parcialmente, e os restantes alvéolos interiores, cujos nós rodam de acordo com as características dos elementos concorrentes.

Considerou-se, simplificadamente, que a rotação dos nós interiores dos alvéolos de extremidade é aproximadamente igual à rotação dos nós dos alvéolos interiores, logo, pode separar-se o painel de laje em dois elementos.

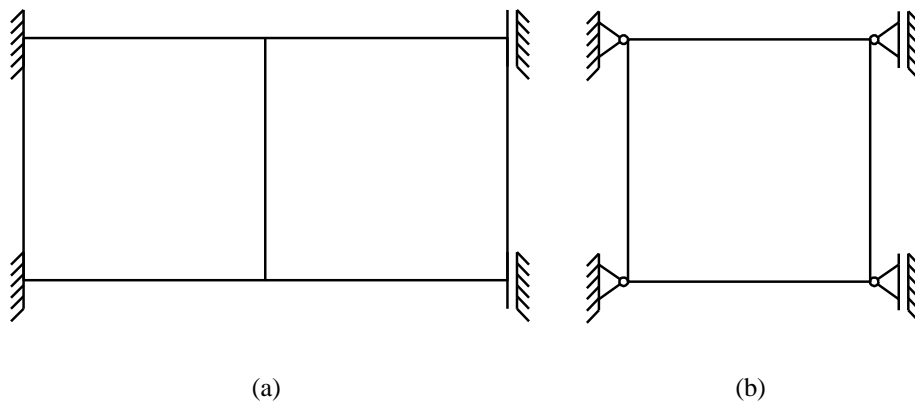


Figura 3.38 – Elementos constituintes do elemento HCS simplificado (a) Elementos de extremidade; (b) Elementos intermédios.

No entanto, a rigidez calculada pelo método simplificado é a rigidez de um painel composto pelos elementos.

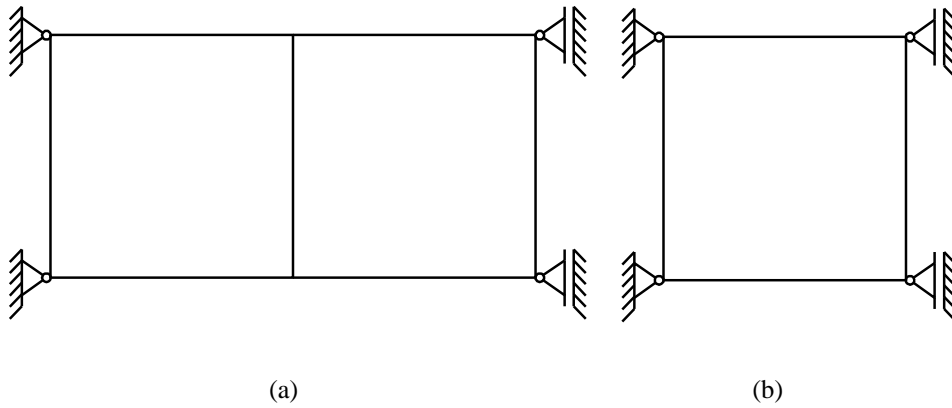


Figura 3.39 – Elementos constituintes do elemento HCS simplificado (a) Elementos de extremidade; (b) Elementos intermédios.

Pode fazer-se então uma ponderação da rigidez, de forma a extrapolar o efeito dos nós de extremidade.

Considerando as relações entre a rigidez dos elementos respectivos de cada painel de laje, tem-se

$$A_e = \frac{K_{e,enc}}{K_{e,rot}} \quad (3.157)$$

$$A_c = \frac{K_{c,enc}}{K_{c,rot}} \quad (3.158)$$

onde

$K_{e, enc}$, representa a rigidez do elemento de extremidade do modelo encastrado

$K_{e, rot}$, representa a rigidez do elemento de extremidade do modelo rotulado

$K_{c, enc}$, representa a rigidez do elemento central do modelo encastrado

$K_{c, rot}$, representa a rigidez do elemento central do modelo rotulado

Pode escrever-se

$$C = \frac{(n-2)A_c + A_e}{n-1} \quad (3.159)$$

onde

n é o número de alvéolos do painel considerado

$(n-2)A_c$ representa a afectação dos alvéolos centrais pelo respectivo coeficiente de rigidez

A_e representa a afectação dos alvéolos de extremidade pelo respectivo coeficiente de rigidez

$(n-1)$ representa o número de elementos do painel considerado

Como se considera que os alvéolos centrais têm a mesma rigidez em ambos os casos, pois o seu modelo estrutural é o mesmo, tem-se $A_c = 1$.

Para o cálculo do parâmetro A_e , calculou-se a rigidez dos dois sistemas representativos dos alvéolos de extremidade.

Para o sistema encastrado, utilizou-se o Método dos Deslocamentos considerando os seguintes graus de liberdade após simplificação por simetria.

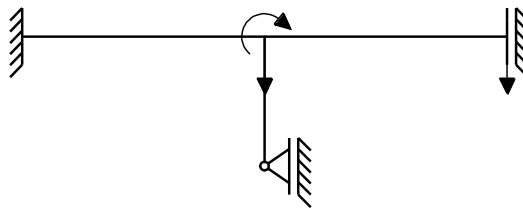


Figura 3.40 – Aplicação do método dos deslocamentos ao sistema da Figura 4,8(a) após simplificação por simetria.

De onde resulta a matriz de rigidez

$$K = E \begin{pmatrix} \frac{12I_l}{L_l^3} & -\frac{12I_l}{L_l^3} & -\frac{6I_l}{L_l^3} \\ -\frac{12I_l}{L_l^3} & \frac{24I_l}{L_l^3} & 0 \\ -\frac{6I_l}{L_l^3} & 0 & \frac{8I_l}{L_l} + \frac{6I_n}{L_n} \end{pmatrix} \quad (3.160)$$

Posteriormente, condensou-se a matriz de rigidez para o deslocamento u_l , e dobrou-se a rigidez para anular o efeito da simplificação por simetria, tendo sido obtido o seguinte resultado:

$$K_E = 2 \frac{6I_l(I_l L_n + 3I_n L_l)E}{L_l^3(4I_l L_n + 3I_n L_l)} \quad (3.161)$$

Para o caso rotulado, este valor é conhecido pois já foi deduzido anteriormente. Modificando as constantes para que se pudesse usar as inércias e os comprimentos considerados no caso anterior, tem-se

$$K_A = \frac{12E}{L_l^2 \left(\frac{2L_n}{I_n} + \frac{L_l}{I_l} \right)} \quad (3.162)$$

Fazendo a razão entre ambas as rigidezes, chega-se à expressão

$$A_e = \frac{(2I_l L_n + I_n L_l)(I_l L_n + 3I_n L_l)}{I_n L_l (4I_l L_n + 3I_n L_l)} \quad (3.163)$$

que por simplificação, pode reescrever-se da forma

$$A_e = \frac{(2A_L + A_I)(A_L + 3A_I)}{A_I (4A_L + 3A_I)} \quad (3.164)$$

onde

$$A_L = \frac{L_n}{L_l} \quad (3.165)$$

$$A_I = \left(\frac{e_n}{e_l} \right)^3 \quad (3.166)$$

Aplicando esta metodologia ao elemento HCS20, tem-se

Tabela 3.10 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de corte segundo y

	HCS20	HCS50
$f_{a,l} [m/kN]$	$8,776 \times 10^{-7}$	$3,929 \times 10^{-9}$
A_e	1,69	1,65
C	1,098	1,217
$f_a [m/kN]$	$5,684 \times 10^{-6}$	$1,292 \times 10^{-5}$
$f_l [m/kN]$	$1,143 \times 10^{-6}$	$8,511 \times 10^{-7}$
$K_{Vy} [kN/m]$	$1,465 \times 10^5$	$7,264 \times 10^4$
δ	4,5%	7,7%

onde δ é a diferença percentual obtida comparando o método numérico ao método expedito

$$\delta = \frac{K_{Vy,numérico} - K_{Vy,expedito}}{K_{Vy,numérico}} \quad (3.167)$$

podendo considerar-se válida a aproximação.

O factor de correcção C tem um papel fundamental na aproximação do resultado ao resultado numérico.

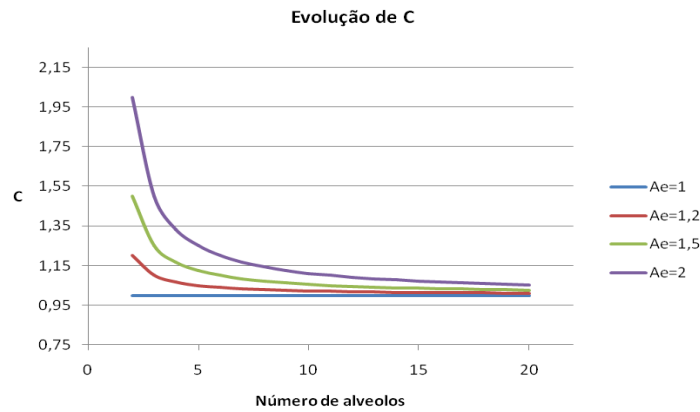


Figura 3.41 – Evolução do parâmetro de correcção C .

Como se pode ver pelo gráfico da Figura 3.41, o parâmetro de correcção ganha importância à medida que cresce o valor de A_e e reduzem o número de alvéolos por unidade de largura, o que vai de encontro ao que seria expectável.

Quanto à sua eficácia no acerto do valor final calculado, calculando as mesmas rigidezes sem usar este parâmetro, obtiveram-se $K_v = 1,3781 \times 10^8$ e $K_v = 7,244 \times 10^7$ e os erros relativos associados $\delta = 11,8\%$ e $\delta = 23,3\%$ para os elementos HCS20 e HCS50, respectivamente.

3.6.5 DETERMINAÇÃO EXPEDITA DA RIGIDEZ DE TORÇÃO

Como no capítulo anterior, este valor será calculado pela expressão (2.70) como sugerido por Ugural [7]

$$G_{xy} = \frac{(1 - \sqrt{\nu_x \nu_y})}{2} \sqrt{D_x D_y} \quad (3.168)$$

Por simplificação, assumir-se-á que $\nu_x = \nu_y = \nu = 0,2$. Substituindo as rigidezes de flexão das Tabelas 3.7 e 3.8 em (3.168), tem-se:

Tabela 3.11 – Síntese dos resultados obtidos para a rigidez de torção.

	$G_{xy} [kN.m^2/m]$	δ
HCS20	$7,054 \times 10^3$	2,5%
HCS50	$7,837 \times 10^4$	5,8%

Onde δ é a diferença percentual obtida comparando o método numérico ao método expedito

$$\delta = \frac{G_{xy,numérico} - G_{xy,expedito}}{G_{xy,numérico}} \quad (3.169)$$

Dada a grandeza dos erros relativos, pode considerar-se válida a premissa $\nu_x = \nu_y = \nu$ e consequentemente a aproximação considerada.

3.7 FACTORES DE REDUÇÃO MECÂNICA

Definidas as características mecânicas da laje alveolar, considerou-se uma laje maciça de igual geometria para que, comparando ambas, se tirassem algumas conclusões quanto à causa dos diferentes comportamentos e se obtivessem coeficientes de redução passíveis de serem utilizados para modelar as lajes alveolares com elementos finitos de laje utilizando o programa comercial SAP2000®.

Cada factor de redução foi calculado pela razão entre a característica mecânica a considerar das lajes alveolar e maciça respectivamente.

$$\rho_i = \frac{D_{i,HCS}}{D_{i,LM}} \quad (3.70)$$

Aplicando os valores obtidos para a laje de $h=0,2$ e analogamente, para a laje de $h=0,5$ chega-se aos valores indicados nas Tabelas 3.12 e 3.13.

Tabela 3.22 – Factores de redução da laje de $h=0,2$.

ρ_{M_x}	0,868
ρ_{M_y}	0,819
$\rho_{M_{xy}}$	0,695
ρ_{V_x}	0,376
ρ_{V_y}	0,059

Tabela 3.13 – Factores de redução da laje de $h=0,5$.

ρ_{M_x}	0,654
ρ_{M_y}	0,554
$\rho_{M_{xy}}$	0,511
ρ_{V_x}	0,306
ρ_{V_y}	0,015

Pode concluir-se que apesar de, como se esperava, as rigidezes das lajes alveolares são menores quando comparadas com uma laje maciça com as mesmas dimensões, as rigidezes análogas são da mesma ordem de grandeza, sendo a rigidez de corte no sentido transversal a única excepção. Isto mostra que é neste factor que reside a principal causa das características comportamentais das lajes alveolares.

CAPÍTULO 4

MODELAÇÃO DOS ELEMENTOS HCS

Seguidamente, usando os resultados do capítulo anterior, utilizar-se-á um programa comercial de cálculo estrutural para modelar os elementos de laje alveolar e simular variadas situações de carga e geometria para compreender a distribuição de esforços nestes elementos.

4.1 MODELO SIMPLIFICADO DE ELEMENTOS DE LAJE

O modelo foi construído com elementos de laje espessa para ter em conta a rigidez de corte que, como se verificou anteriormente, é um factor crucial.

Inserida a espessura da laje, introduziram-se nos modificadores das características mecânicas do programa de cálculo automático os factores de redução calculados, definindo-se assim o elemento finito de laje alveolar.

Criaram-se dois modelos de laje quadrados com 3,6m de lado (3 painéis de 1,2m de largura e 3,6m de vão) que consistiram em lajes simplesmente apoiadas em dois bordos opostos perpendiculares ao eixo das nervuras, ligados entre si por barras de 0,01m de comprimento e secção de $1 \times 1\text{m}^2$ do material MR, para observar as alterações provocadas pela redução das características. O modelo foi sujeito a uma carga concentrada no centro de valor 10kN (Figura 4.1).

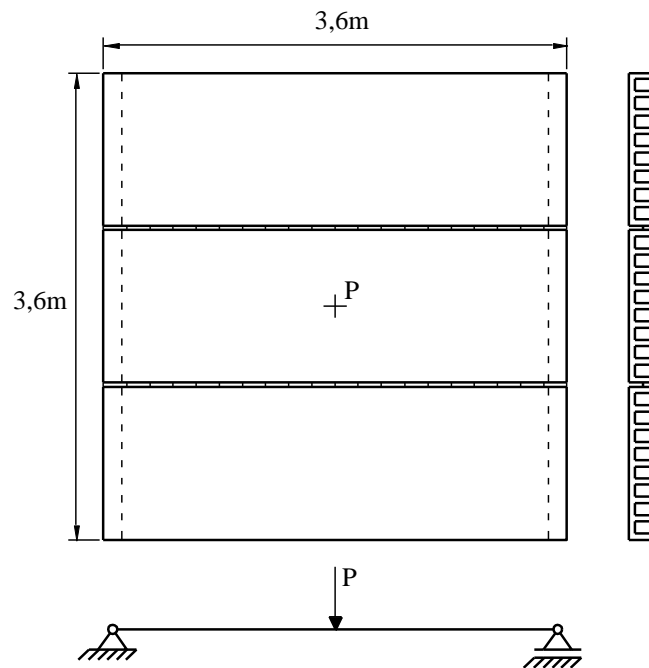


Figura 4.1 – Esquema do sistema de ensaio preliminar.

Comparando o comportamento deste modelo com o modelo de uma laje maciça isotrópica de igual geometria em planta, conclui-se que as alterações surtiram o efeito desejado, pois verifica-se uma maior distribuição de carga na direcção longitudinal.

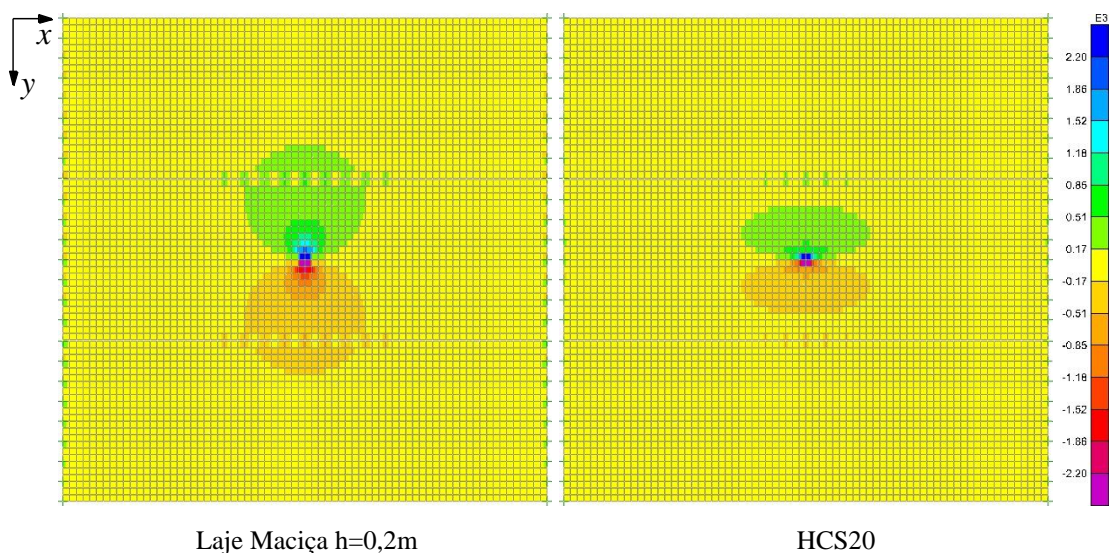


Figura 4.2 – Comparação entre Laje Maciça e HCS20. Distribuição de V_y [N/m]; Carga 10kN.

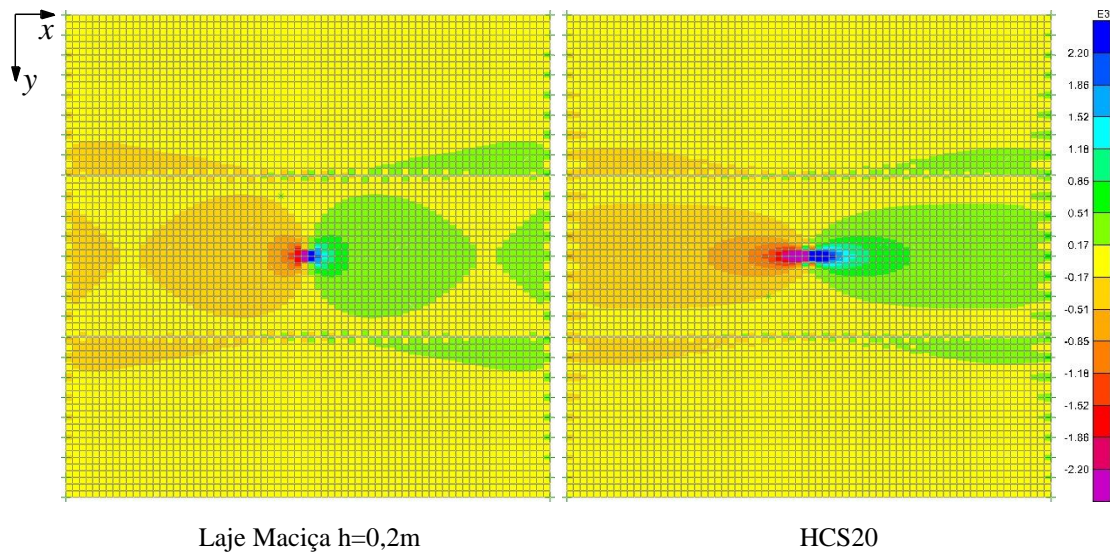


Figura 4.3 – Comparação entre Laje Maciça e HCS20. Distribuição de V_x [N/m]; Carga 10kN.

Esta análise preliminar mostra que, como esperado, existe uma maior capacidade para distribuir as cargas no sentido transversal do painel de laje maciça do que o painel de HCS, apesar de este fenómeno ser pouco perceptível à medida que nos afastamos longitudinalmente da zona carregada. O primeiro fenómeno é ainda mais pronunciado quando se analisa o modelo de HCS50.

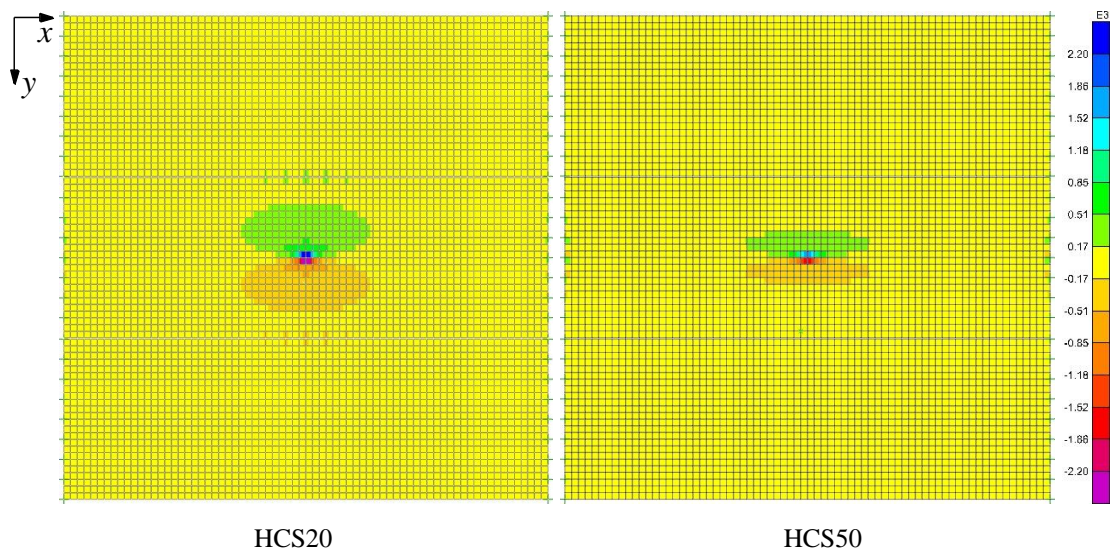


Figura 4.4 – Comparação entre HCS20 e HCS50. Distribuição de V_y [N/m]; Carga 10kN.

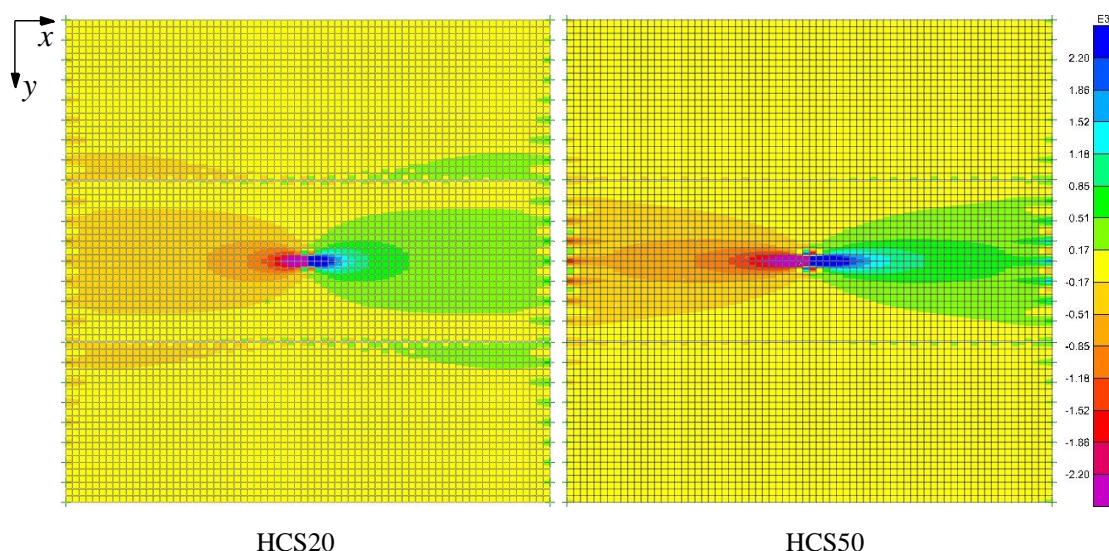


Figura 4.5 – Comparação entre HCS20 e HCS50. Distribuição de V_x [N/m]; Carga 10kN.

4.2 MODELOS DE ELEMENTOS DE LAJE E BARRA

Para determinar o esforço transversal actuante em cada uma das nervuras e a sua variação ao longo da mesma, criou-se um modelo semelhante, onde as nervuras foram modeladas com elementos de Barra que possuem rigidez D_x e K_{Vx} ligados entre si por elementos de Laje com as restantes componentes de rigidez da HCS: D_y , K_{Vy} e G_{xy} . Desta forma, o esforço transversal nas nervuras é totalmente suportado pelos elementos de barra, facilitando a análise do problema sem perda de qualidade dos resultados.

Os elementos de Barra foram colocados na posição do eixo das nervuras, a sua secção com altura igual à da laje e largura igual à razão entre a largura do painel de laje e o número de nervuras. As características segundo o eixo longitudinal foram modificadas pelos mesmos factores de redução calculados anteriormente e, por consequência, estas mesmas rigidezes foram anuladas na laje, assim como a rigidez de torção foi eliminada na nervura.

Pode verificar-se a equivalência entre as duas soluções comparando a distribuição de cargas em ambos os casos. Pode observar-se que as linhas de igual tensão se encontram aproximadamente nas mesmas coordenadas geométricas de cada um dos modelos, assim como as zonas de tensão máxima e uma semelhante capacidade de dispersão.

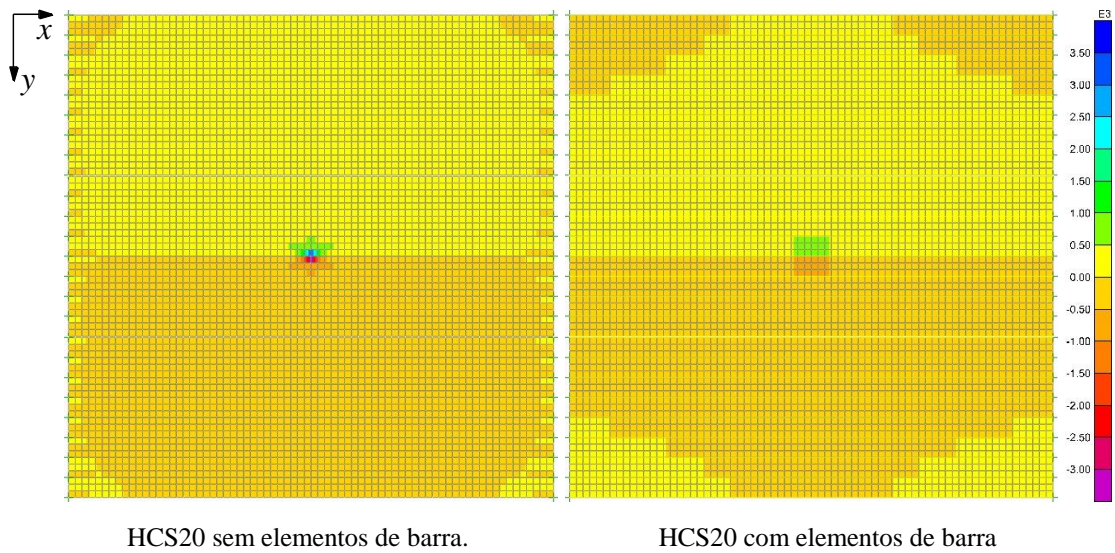


Figura 4.6 – Comparação entre modelos com elementos de laje e modelos mistos com elementos de laje e barra. Distribuição de V_y [N/m]; Carga 10kN.

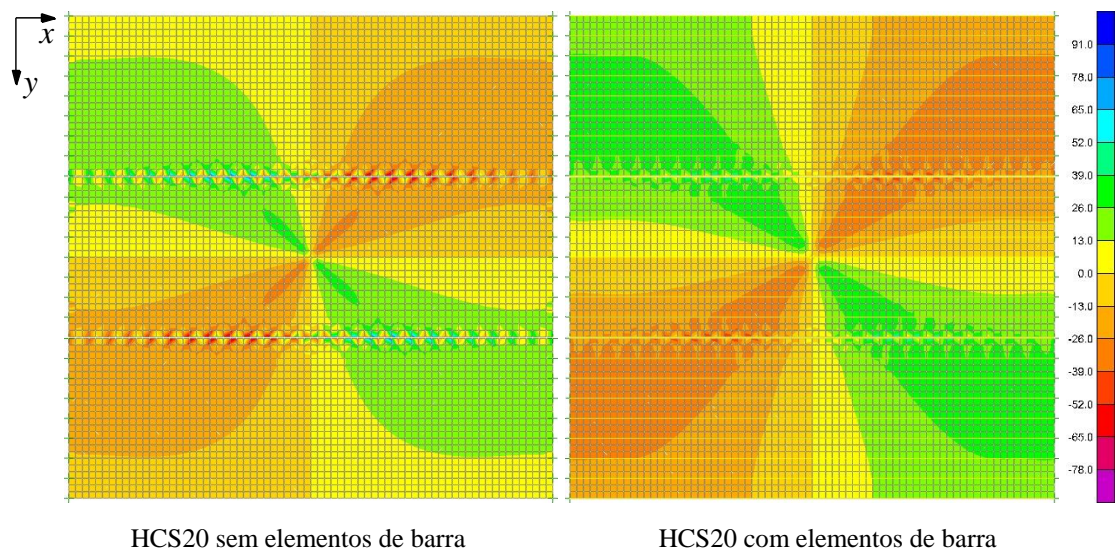


Figura 4.7 – Comparação entre modelos com elementos de laje e modelos mistos com elementos de laje e barra. Distribuição de M_{xy} [N.m/m]; Carga 10kN.

4.3 CARACTERÍSTICAS DOS ENSAIOS

Fez-se um estudo paramétrico para compreender a forma como os diversos factores geométricos da laje alveolar, a posição do carregamento e a importância dos fenómenos que ocorrem na pré-rotura influenciam a concentração de esforço transversal.

Para o efeito, fizeram-se modelos de Elementos de Laje e Elementos de Barra com diferentes geometrias que foram carregados em coordenadas estratégicas. Geometricamente, consideraram-se painéis individuais de laje de vários comprimentos e

1,20m de largura, ou seja, em planta as lajes variaram em comprimento entre os 1,2m e os 13,2m em incrementos de 1,2m e em largura entre os 1,2m e os 13,2m em incrementos de 2,4m, consistindo estes incrementos na adição de dois painéis de laje lateralmente.

Utilizou-se um sistema de apoios simples pois considerou-se que a laje actua simplesmente apoiada segundo o eixo longitudinal das nervuras.

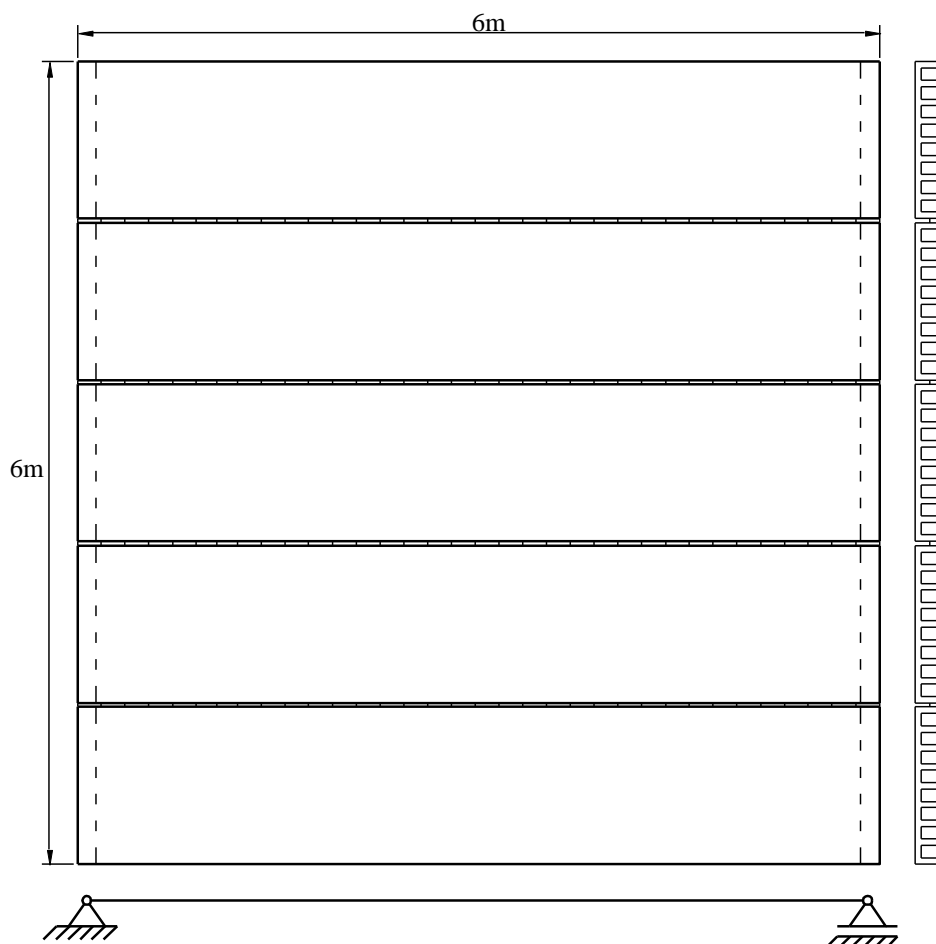


Figura 4.8 – Esquema do modelo definitivo.

Como referido anteriormente, cada painel de laje individual tem 1,20m de largura, sendo as lajes formadas por vários painéis individuais justapostos lateralmente. Estes painéis são ligados entre si com elementos de barra rígida de pequenas dimensões para posteriormente simular a fendilhação que ocorre na ligação entre os painéis (ver Figuras 4.9 e 4.10).

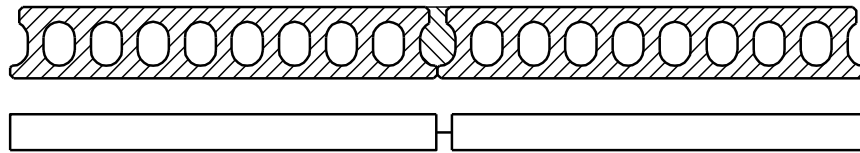


Figura 4.9 – Esquema de junta não fendilhada entre painéis.

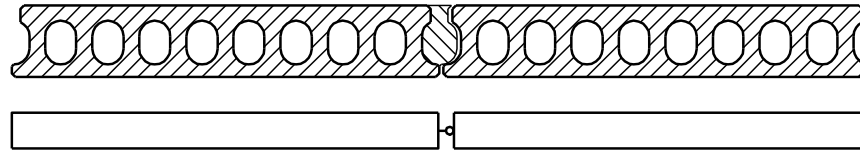


Figura 4.10 – Esquema de junta fendilhada entre painéis.

As barras de ligação entre painéis de laje têm um comprimento de 1cm, secção quadrangular de $0,025\text{m}^2$ e o material que a constitui é o anteriormente designado MR.

Em condições não fendilhadas, isto é, quando a betonagem de ligação entre os painéis de laje adjacentes se encontra perfeitamente solidária em todo o seu bordo, a laje tem a capacidade de transmitir todos os esforços de um painel para o vizinho. Esta situação é simulada com a barra encastrada nas duas extremidades (Figura 4.9).

Quando pelo contrário a ligação se encontra fendilhada, pelo menos um dos painéis de laje está desligado do betão de solidarização, impedindo a transmissão de momentos segundo a direcção perpendicular às nervuras e, mais importante, momentos torsores, transmitindo, no entanto, forças de corte. Esta situação é simulada aplicando uma rótula esférica numa das extremidades da barra rígida (Figura 4.10). Esta transmissão de forças de corte é garantida pela geometria dos bordos dos painéis de HCS que formam a junta.

As cargas foram colocadas nas posições indicadas na Figura 4.11 e com a nomenclatura apresentada na Tabela 4.1. A carga (P) utilizada foi de 10kN para que, proporcionalmente, os resultados apresentassem valores com uma ordem de grandeza perceptível.

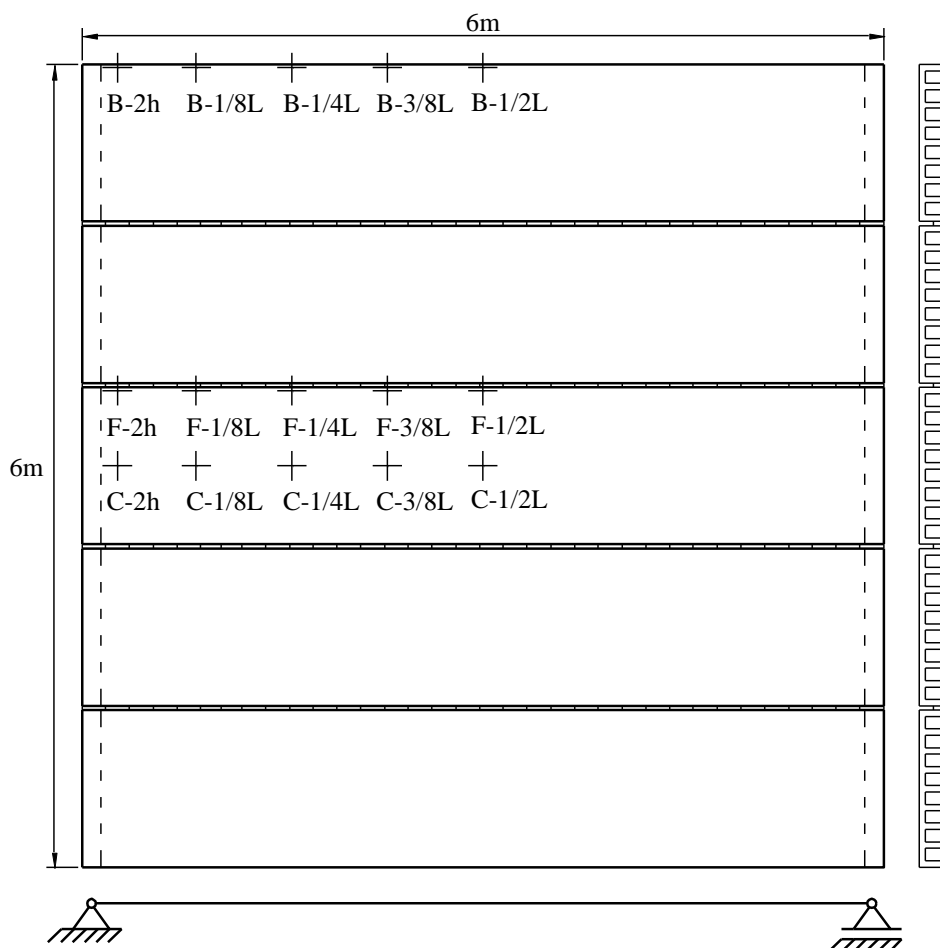


Figura 4.11 – Nomenclatura e posicionamento das cargas utilizadas.

Tabela 4.1 – Nomenclatura e posicionamento das cargas utilizadas.

Posição longitudinal	Nerv. Central do Painel	Nerv. do Bordo do Painel	Junta Entre Paineis Adjacentes Fendilhada	Nervura Carregada Após Fendilhação Longitudinal
1/2 Vão	C-1/2L	B-1/2L	J-1/2L	L-1/2L
3/8 Vão	C-3/8L	B-3/8L	J-3/8L	L-3/8L
1/4 Vão	C-1/4L	B-1/4L	J-1/4L	L-1/4L
1/8 Vão	C-1/8L	B-1/8L	J-1/8L	L-1/8L
2h	C-2h	B-2h	J-2h	L-2h

Considerou-se que quando a fendilhação longitudinal acontece no alvéolo adjacente à nervura carregada, deixa de haver transmissão de cargas de um lado para o outro da fenda. Neste caso, considera-se que se trata de caso semelhante ao de um carregamento de bordo, sendo que a largura da laje solicitada deve respeitar a geometria resultante da fendilhação, como se exemplifica na Figura 4.12.

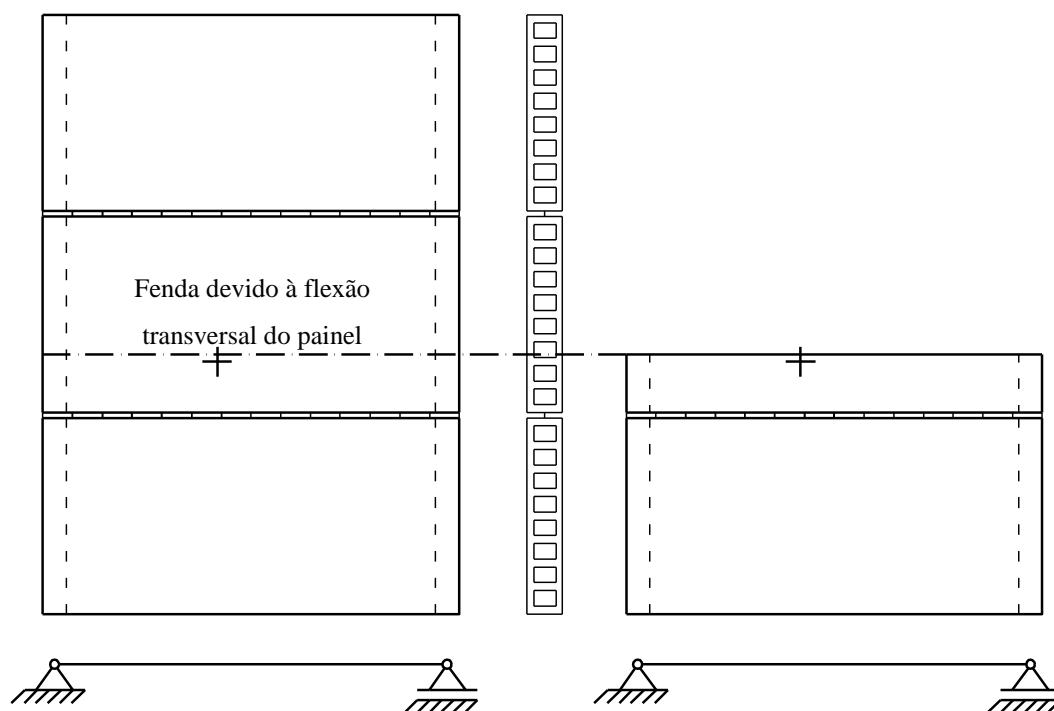


Figura 4.12 – Exemplo explicativo do modelo utilizado para o carregamento de bordo.

Partindo desta premissa, consideraram-se lajes com larguras de 0,9m, 0,6m e 0,3m com cargas aplicadas no bordo. A Figura 4.13 mostra a disposição das cargas no bordo duma laje nestas condições.

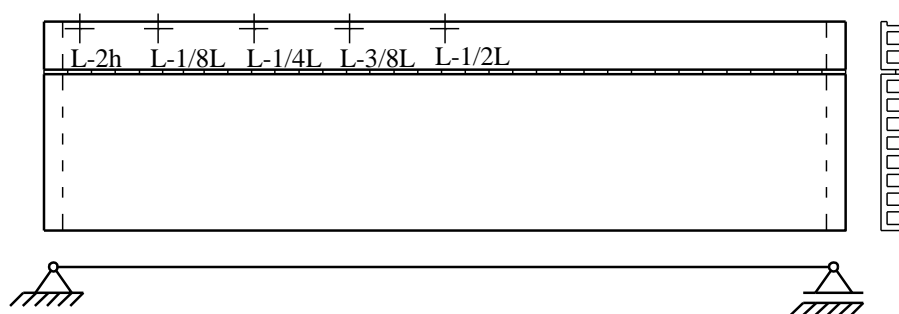


Figura 4.13 – Nomenclatura e posicionamento das cargas de bordo utilizadas.

Esta metodologia foi também realizada nos elementos HCS50.

No capítulo seguinte analisar-se-ão os resultados obtidos com as modelações descritas.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Analizados os modelos, procedeu-se à observação dos resultados obtidos e posterior tratamento dos dados para que, devidamente organizados, se tornassem passíveis de ser comparados entre si e com os resultados experimentais descritos no Capítulo 2.

Far-se-á uma análise e comparação dos vários modelos ensaiados: laje maciça, HCS com elementos de laje e HCS com elementos de laje e barra, sendo o estudo destes últimos mais exaustivo, recorrendo-se a gráficos que sintetizam e facilitam a comparação dos resultados dos ensaios descritos no capítulo anterior.

5.1 DEFORMADA

O primeiro e mais imediato indicador da validade da análise numérica é a deformada. Nesta análise foi usado um modelo de HCS20 de elementos de laje e barra que consistiu em 3 painéis de 4,8m de vão justapostos com as juntas longitudinais fendilhadas. Usaram-se cargas de 10kN aplicadas longitudinalmente a meio vão e transversalmente no centro do painel, no bordo do painel e sobre a junta entre painéis. Observando as várias deformadas obtidas e comparando-as com as referidas por Martins [4] nos seus ensaios em painéis de laje justapostos, pode concluir-se que as deformações são qualitativamente idênticas não podendo no entanto fazer-se uma comparação quantitativa.

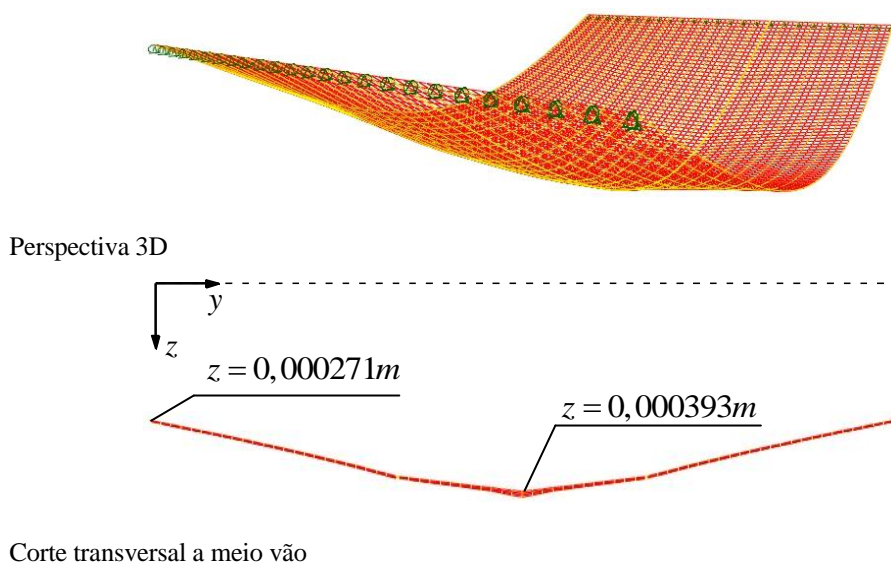


Figura 5.1 – Deformada resultante da solicitação de três painéis de HCS20 justapostos com as juntas fendilhadas, sujeito a carga concentrada a meio vão na nervura central.

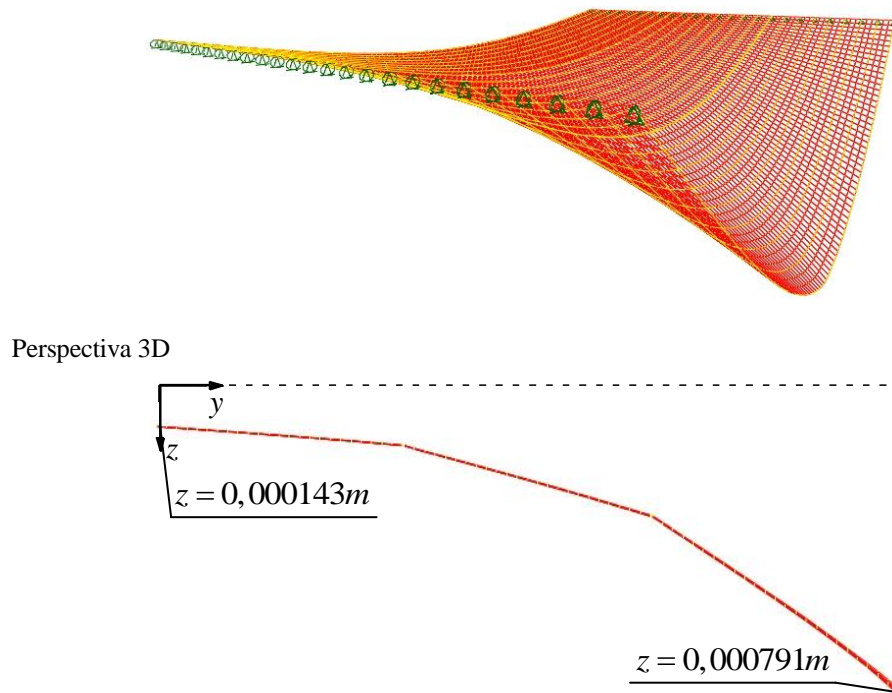


Figura 5.2 – Deformada resultante da solicitação de três painéis de HCS20 justapostos com as juntas fendilhadas, sujeito a carga concentrada a meio vão na nervura periférica.

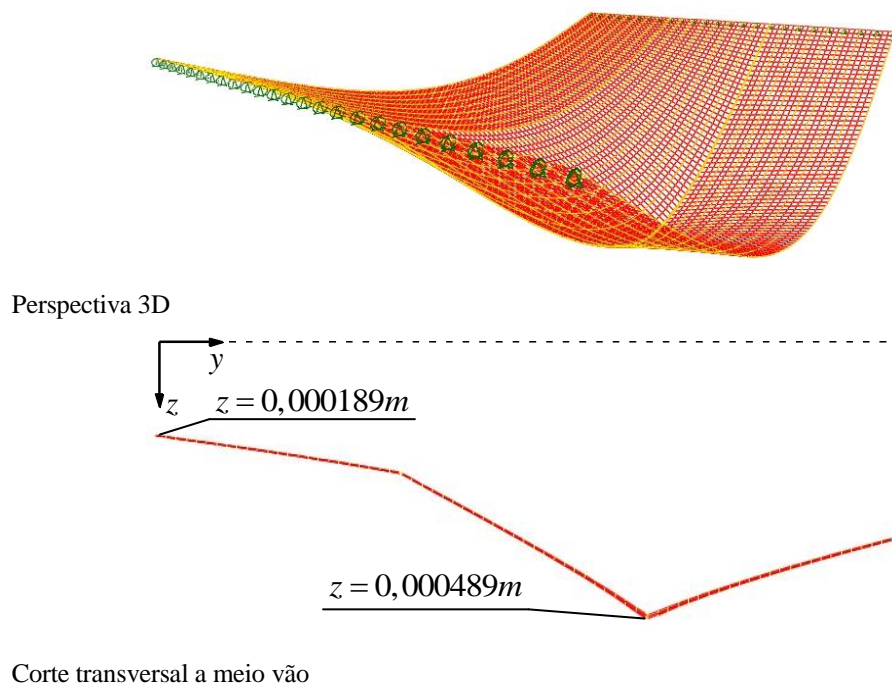


Figura 5.3 – Deformada resultante da solicitação de três painéis de HCS20 justapostos com as juntas fendilhadas, sujeito a carga concentrada a meio vão na junta entre painéis.

5.2 DISTRIBUIÇÃO GLOBAL DE ESFORÇOS SEM FENDILHAÇÃO NAS JUNTAS

A distribuição global de esforços foi observada nos modelos constituídos por elementos finitos de laje, pois nestes é possível fazer uma comparação entre os esforços nas duas direcções principais, algo que os modelos de laje e barra impossibilitam devido à atribuição de rigidezes descrita no capítulo anterior pelos dois tipos de elementos. Dada a analogia dos dois elementos estudados, HCS20 e HCS50, no que toca à distribuição de cargas, os resultados preliminares mostrados são exclusivamente dos elementos HCS20.

Como esperado e se pode observar na Figura 5.4, a distribuição de momentos flectores segundo a direcção longitudinal é muito semelhante à esperada para uma laje maciça, pois a rigidez de flexão nas duas direcções principais é muito próxima. Isto acontece porque, apesar de existirem secções muito diferentes em ambas as direcções, grande percentagem da resistência à flexão é conferida pelas lâminas superior e inferior, que estão igualmente presentes, quaisquer sejam as direcções consideradas.

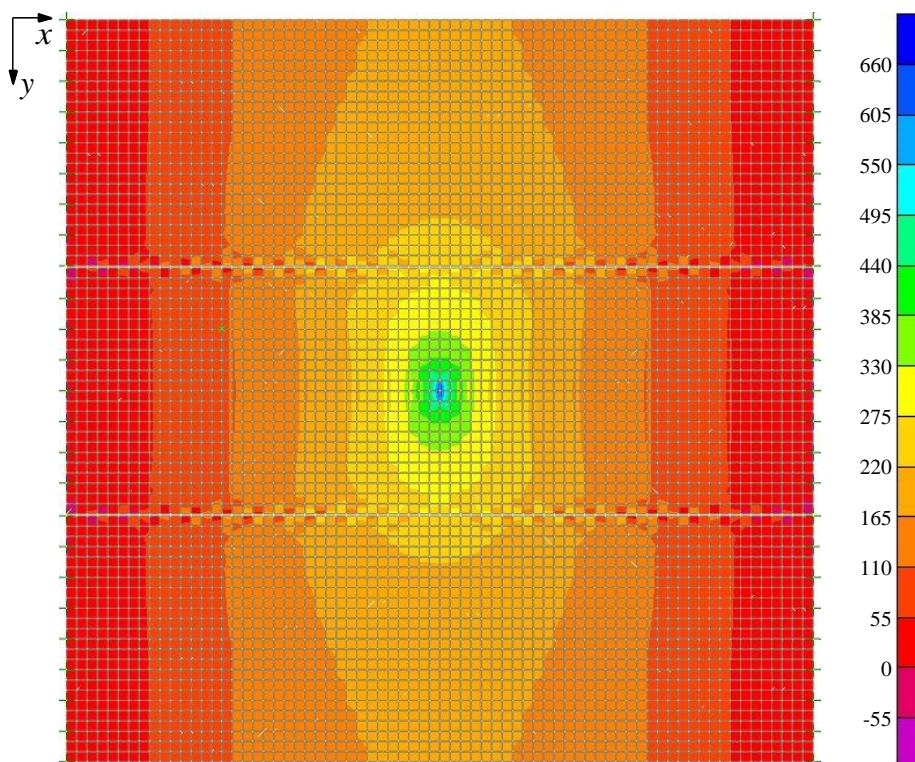


Figura 5.4 – Distribuição de momentos flectores segundo x [N.m/m].

Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.

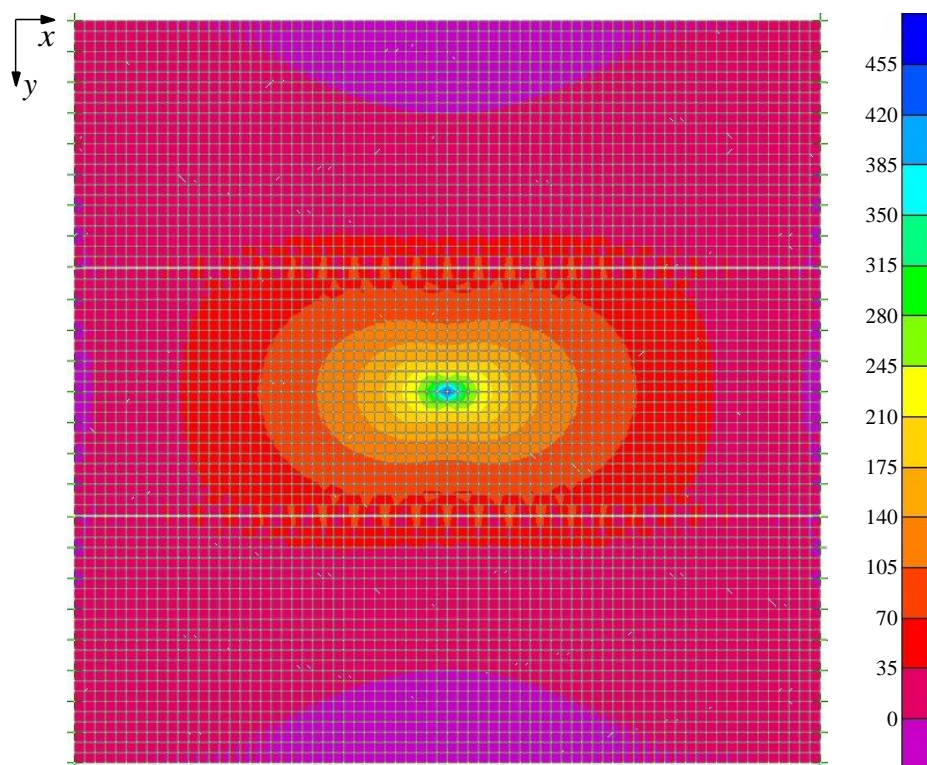


Figura 5.5 – Distribuição de momentos flectores segundo y [N.m/m].

Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.

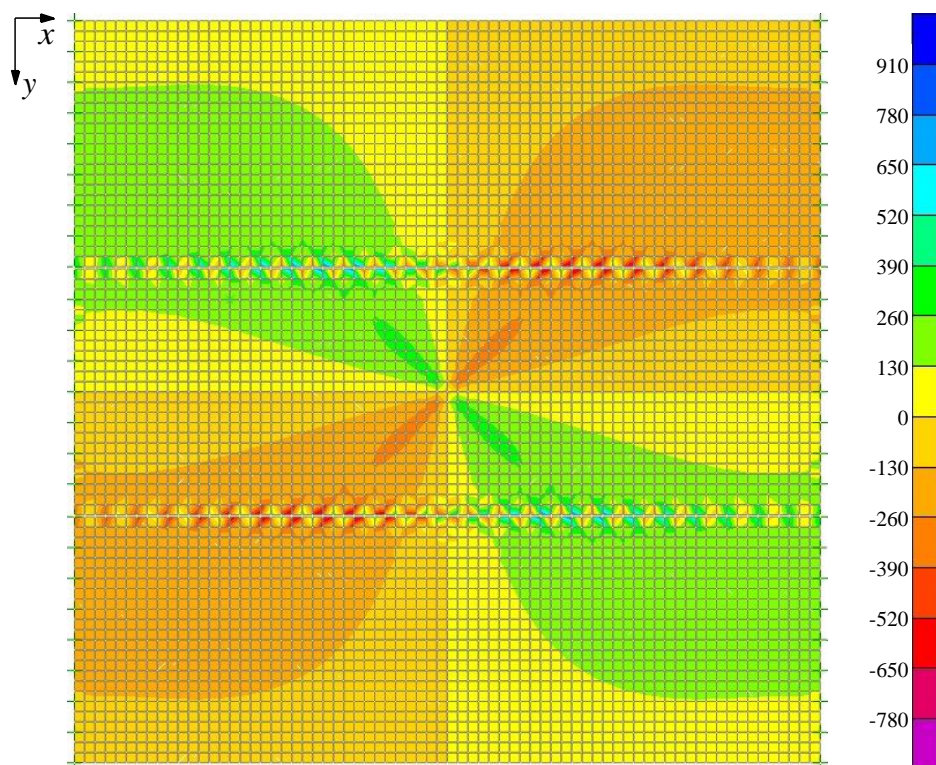


Figura 5.6 – Distribuição de momentos torsores [N.m/m].

Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.

Verifica-se também para os momentos torsores uma distribuição regular, de acordo com o que seria de esperar para uma laje sujeita às condições de ensaio aplicadas.

A rigidez ao corte é o verdadeiro factor de desequilíbrio no que diz respeito ao comportamento deste tipo de elementos estruturais. A grande diferença dos valores relativos das rigidezes de corte ao longo das duas direcções principais, devido à diferença de geometrias, faz com que o sentido longitudinal da laje seja mais rígido, concentrando as forças na zona da nervura carregada, dificultando a sua dispersão pelas nervuras vizinhas, como se pode observar nas Figuras 5.7 e 5.8.

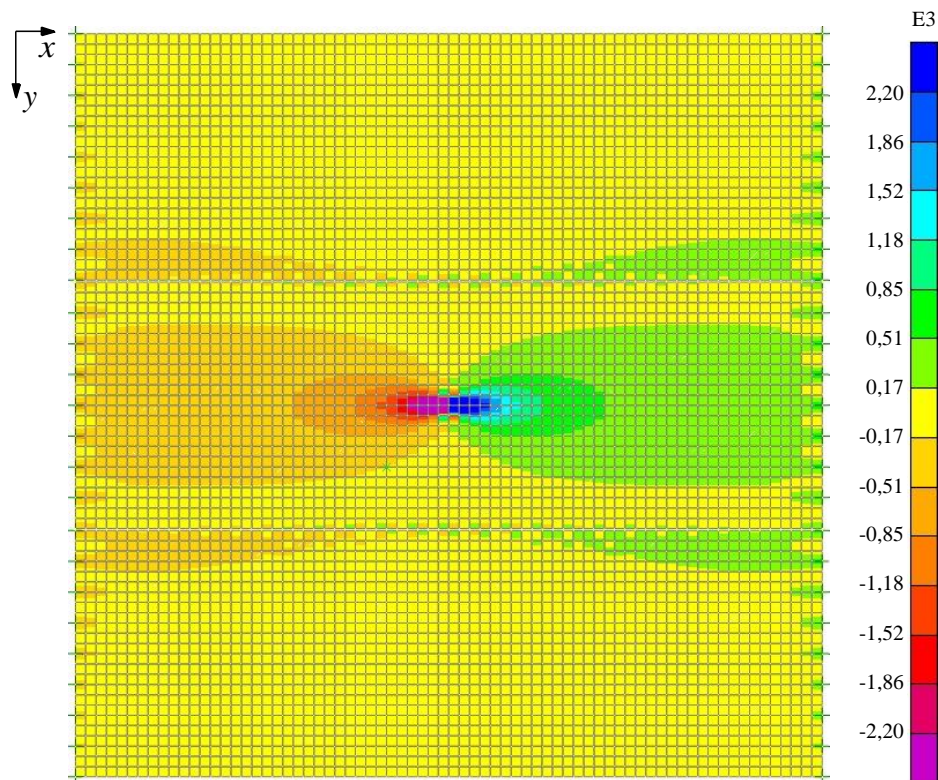


Figura 5.7 – Distribuição de esforço transverso segundo x [N/m].

Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.

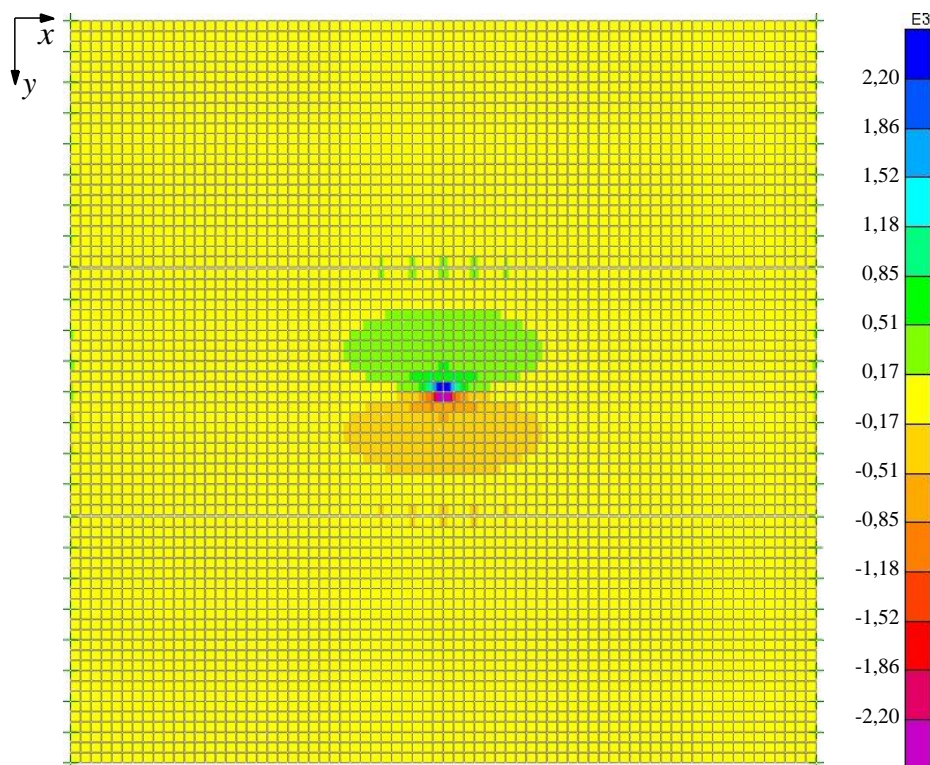


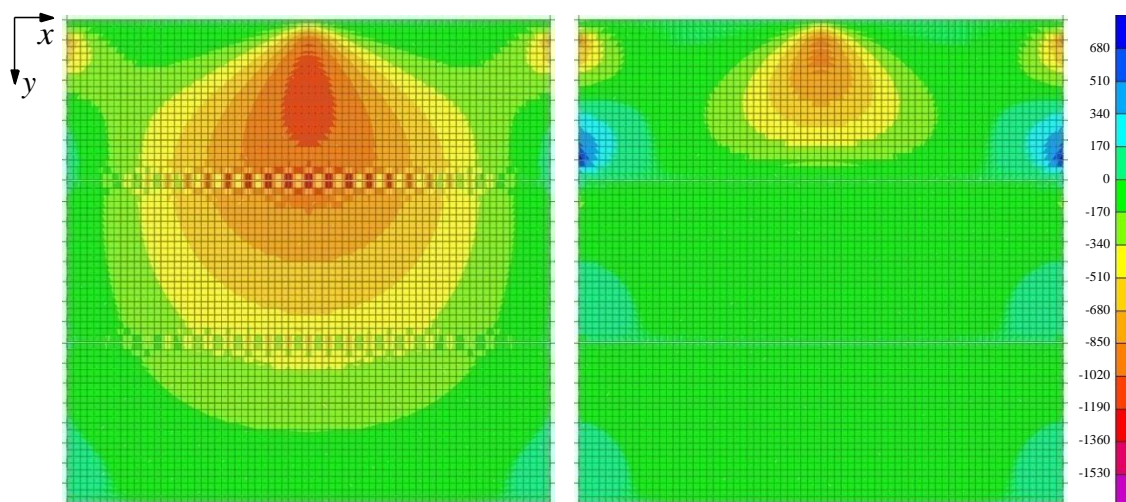
Figura 5.8 – Distribuição de esforço transverso segundo y [N/m].

Carga a meio vão sobre a nervura central; Carga 10kN.

5.3 INFLUÊNCIA DA FENDILHAÇÃO DAS JUNTAS

Estudar-se-á de seguida a influência do desligamento dos painéis devido à fendilhação na interface de ligação entre o painel de laje e o betão de união. Este estudo foi feito nos modelos mistos (elementos de barra e elementos de laje) e por esse motivo, não foram analisados os esforços segundo o eixo longitudinal pelos motivos já referidos. As situações apresentadas são aquelas onde a fendilhação longitudinal mais se faz sentir.

É perceptível, neste caso, o impedimento da transmissão de momentos na direcção transversal através da junta fendilhada, como se pode observar na Figura 5.9. Esta condição é coerente com a deformada obtida por Martins [4] nos seus ensaios em painéis justapostos onde se podem observar rótulas na zona das juntas fendilhadas (Figuras 2.19, 2.20 e 2.21).



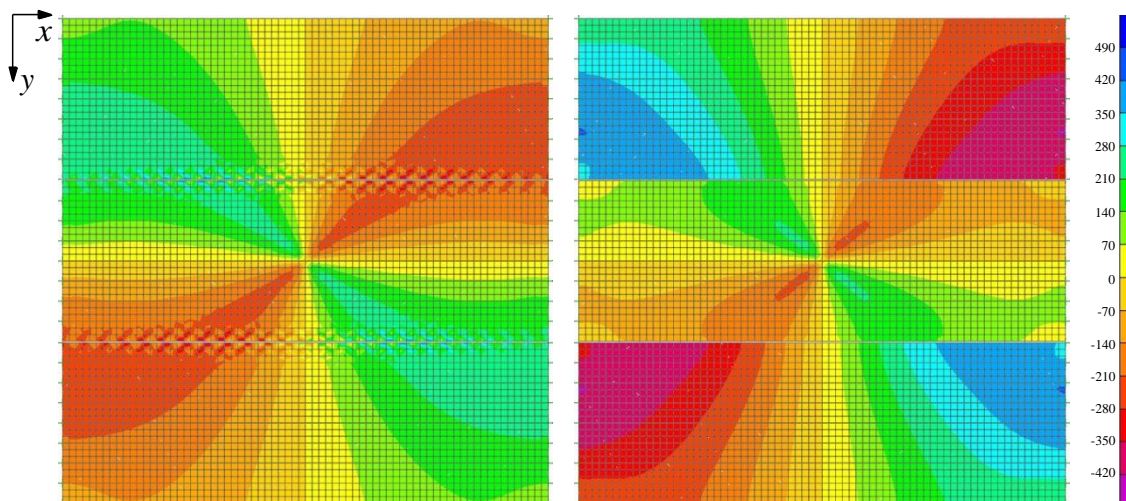
Juntas não fendilhadas

Juntas fendilhadas

Figura 5.9 – Distribuição de momentos flectores segundo y [N.m/m].

Carga a meio vão sobre a nervura de bordo; Carga 10kN.

Os gráficos mostram, o efeito da interacção corte/torção descrito por Aswald e Jacques [1]. Pode observar-se a concentração de momentos torsores nos cantos dos painéis de laje, principalmente para carregamentos de bordo (Figuras 5.12 e 5.13), junto ao apoio mais próximo da zona solicitada. Os gráficos sugerem também que este fenómeno é muito agravado pela fendilhação das juntas, pois neste caso, a transmissão destes esforços é impedida, reduzindo o braço do binário resistente.



Juntas não fendilhadas

Juntas fendilhadas

Figura 5.10 – Distribuição de momentos torsores [N.m/m].

Carga a meio vão sobre a nervura central.

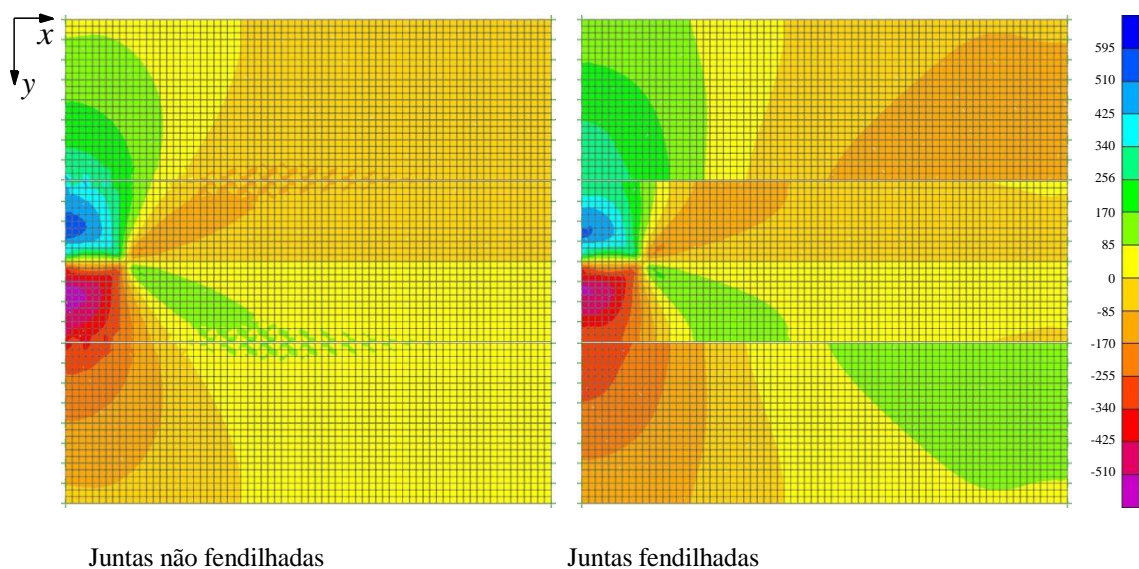


Figura 5.11 – Distribuição de momentos torsores $[N.m/m]$.

Carga a 1/8 de vão sobre a nervura central.

A flexão transversal (Figura 5.5) provoca a fendilhação longitudinal pelas juntas, onde a resistência à tracção é menor, por se tratar de betão moldado em obra de menor resistência que o do painel de HCS. Assim, a junta passa a transferir apenas forças de corte na direcção transversal em resultado da sua geometria.

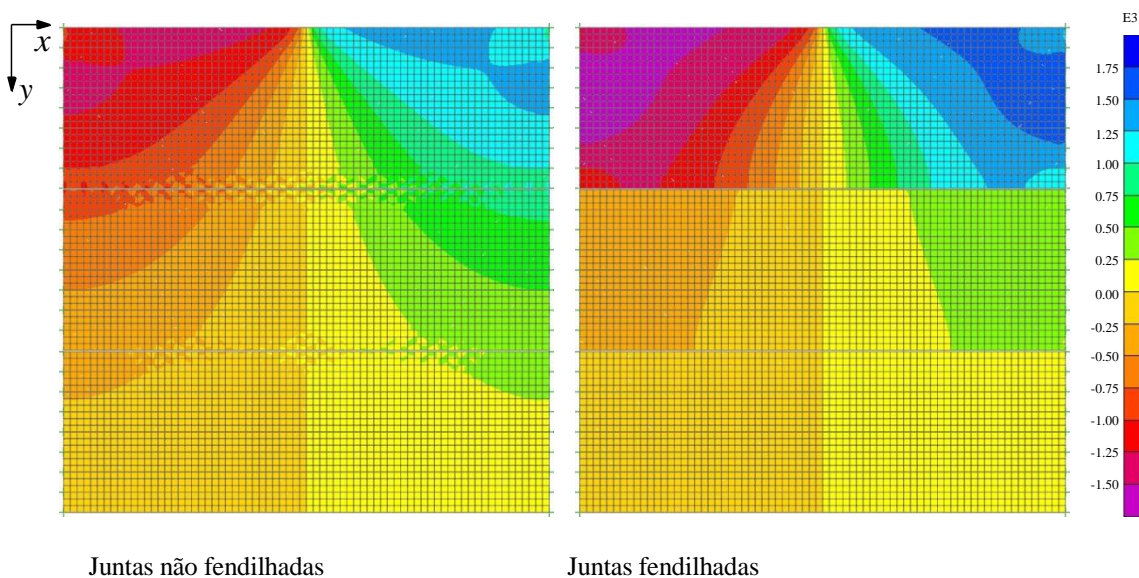
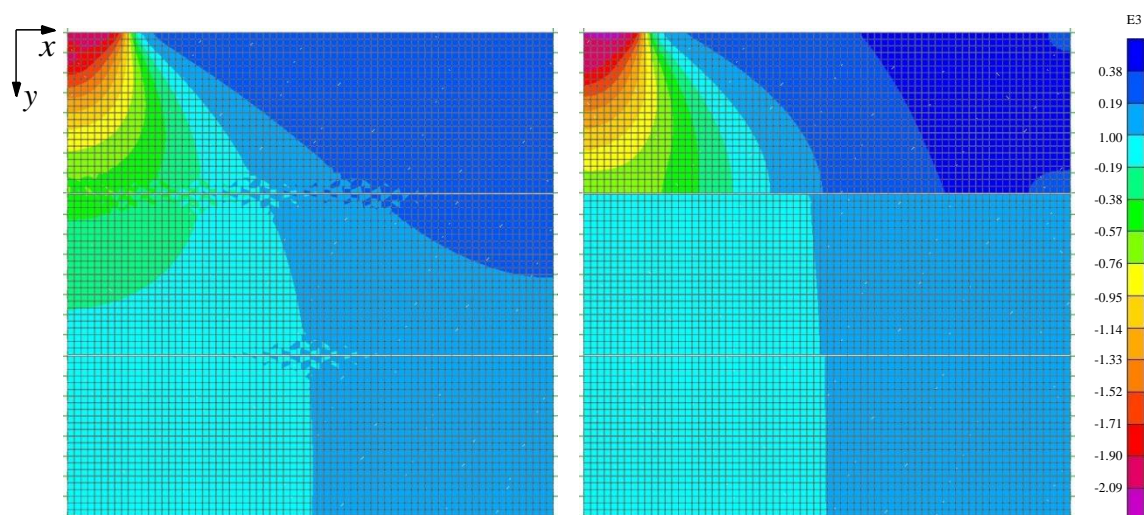


Figura 5.12 – Distribuição de momentos torsores $[N.m/m]$.

Carga a meio vão sobre a nervura de bordo.



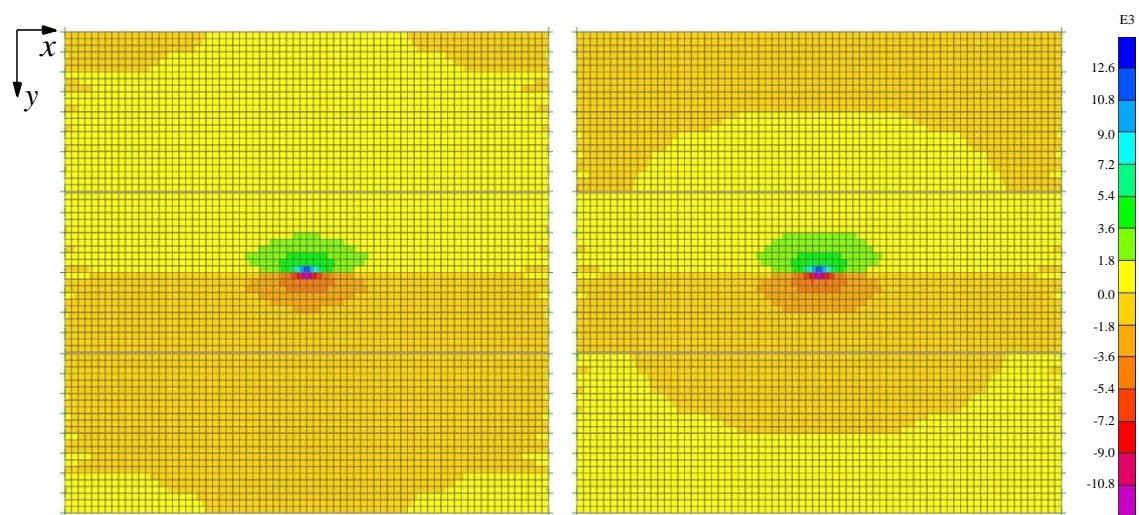
Juntas não fendilhadas

Juntas fendilhadas

Figura 5.13 – Distribuição de momentos torsores [N.m/m].

Carga a 1/8 de vão sobre a nervura de bordo.

Dos resultados relativos à distribuição do esforço transversal segundo y , conclui-se, como esperado, que a fendilhação das juntas não altera significativamente a distribuição transversal das forças de corte. Este fenómeno sugere que apenas os painéis laterais ao solicitado são afectados. Isto acontece devido à inexistência de propagação de momentos flectores na direcção transversal.

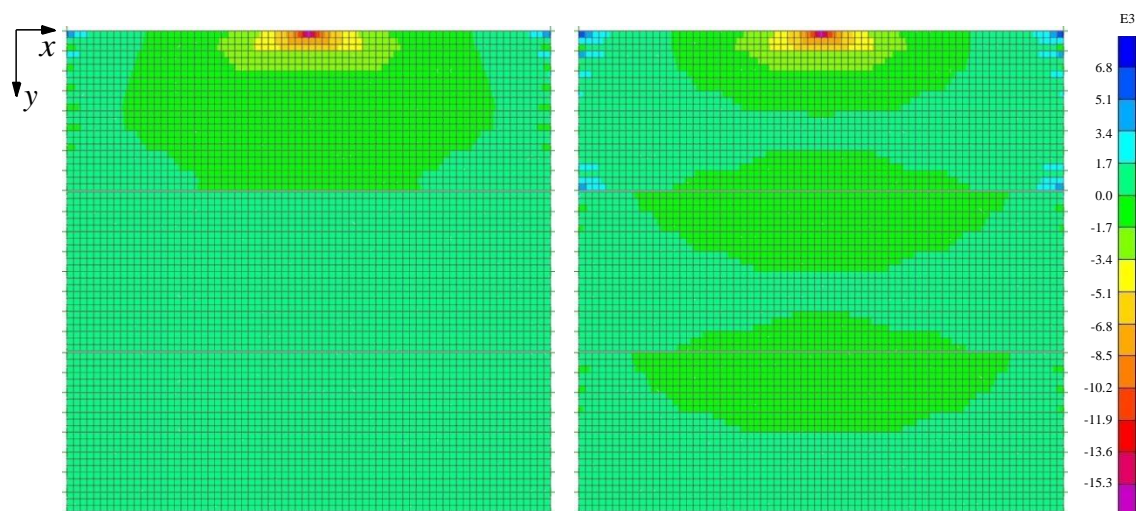


Juntas não fendilhadas

Juntas fendilhadas

Figura 5.14 – Distribuição de esforço transversal segundo y [N/m].

Carga a meio vão sobre a nervura central.

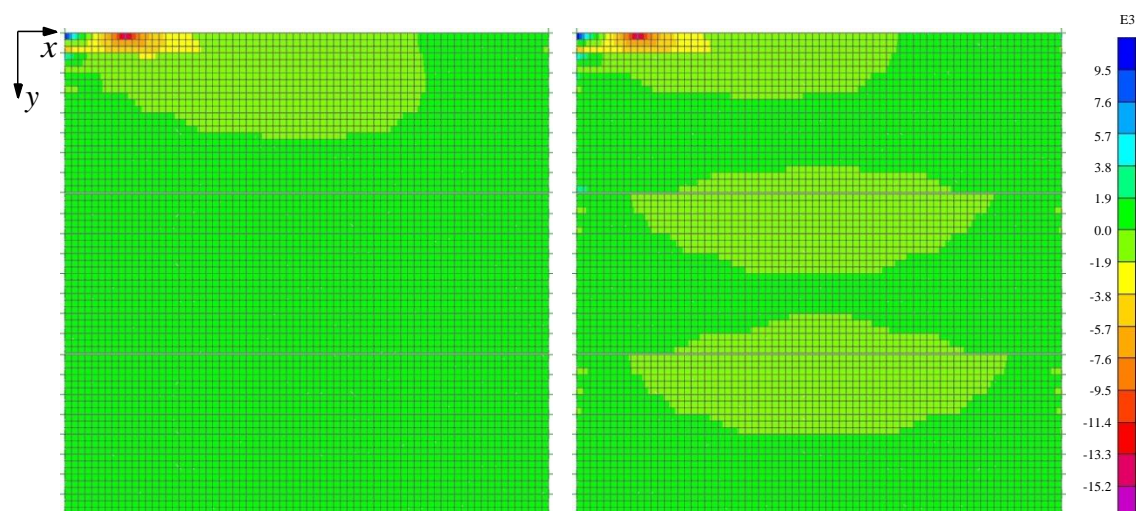


Juntas não fendilhadas

Juntas fendilhadas

Figura 5.15 – Distribuição de esforço transversal segundo y [N/m].

Carga a meio vão sobre a nervura de bordo.



Juntas não fendilhadas

Juntas fendilhadas

Figura 5.16 – Distribuição de esforço transversal segundo y [N/m].

Carga a 1/8 de vão sobre a nervura de bordo.

5.4 ANÁLISE QUALITATIVA DA DISTRIBUIÇÃO DO ESFORÇO TRANSVERSO NAS NERVURAS

Compreendendo o padrão da distribuição de esforço transversal pelas nervuras, pode chegar-se a um valor do esforço transversal actuante passível de ser comparado com o valor do esforço transversal resistente para a verificação da segurança, pois, como expectável, a força de corte actuante em cada secção de cada nervura, depende de diversos factores. Far-se-á primeiramente uma análise qualitativa de forma a ter uma perspectiva geral da

distribuição do esforço transversal nas nervuras e depois uma análise quantitativa dos valores máximos actuantes em cada nervura.

Da análise das imagens seguintes consegue compreender-se o funcionamento deste elemento estrutural, nomeadamente, o mecanismo de migração das forças de uma nervura para a nervura adjacente. É evidente a existência de forças de canto, provocadas pelos momentos torsores, que surgem na interface entre painéis no caso de existirem juntas fendilhadas (Figuras 5.18, 5.20 e 5.22) e também no caso de carregamentos de bordo (Figuras 5.23 a 5.26). Nestes últimos, é notório o efeito da interacção corte/torção pelo aumento de esforço transversal na zona do apoio da nervura carregada.

No caso das lajes com as juntas fendilhadas, existe transmissão de forças de corte entre o painel carregado e os painéis adjacentes. Estas forças provocam esforço transversal nas nervuras das juntas que, apesar de ser significativo, não é condicionante na verificação da segurança face ao valor do esforço transversal na nervura carregada.

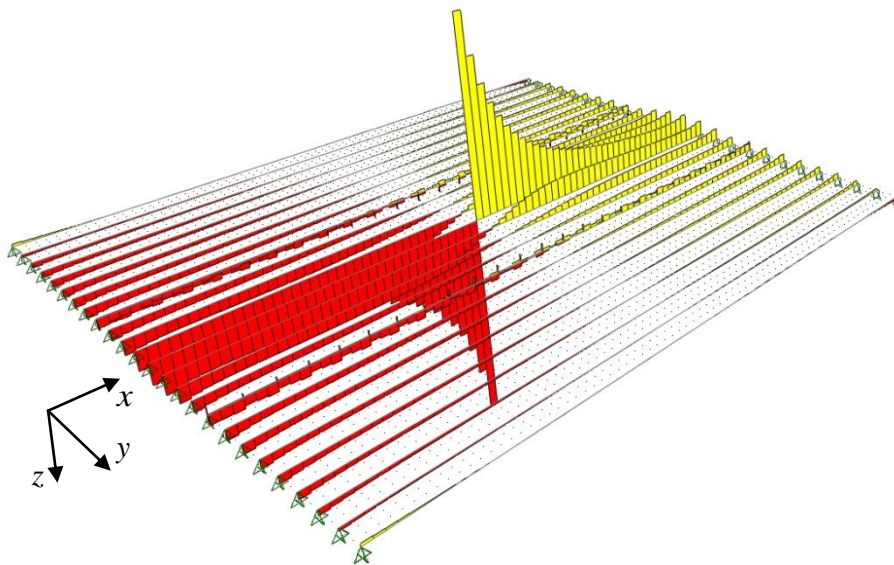


Figura 5.17 – Distribuição de esforço transversal pelas nervuras.

Carga a meio vão sobre a nervura central. Juntas não fendilhadas.

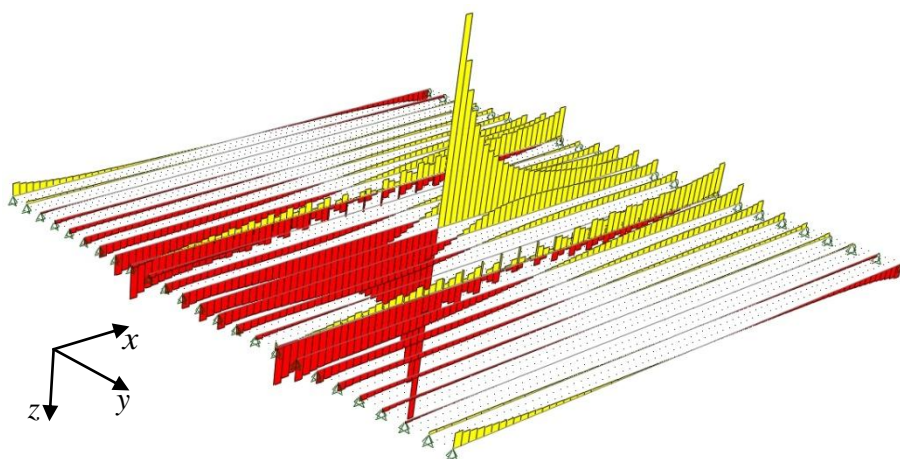


Figura 5.18 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras.
Carga a meio vão sobre a nervura central. Juntas fendilhadas.

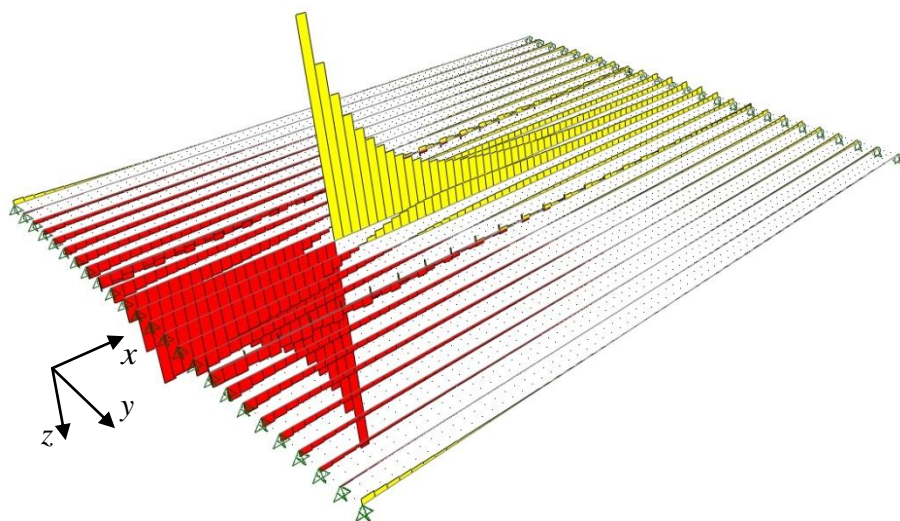


Figura 5.19 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras.
Carga a 1/4 de vão sobre a nervura central. Juntas não fendilhadas.

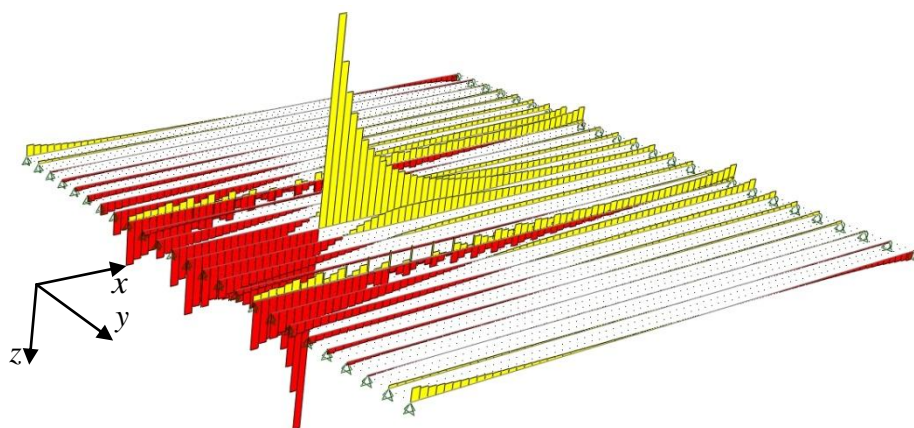


Figura 5.20 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras.
Carga a 1/4 de vão sobre a nervura central. Juntas fendilhadas.

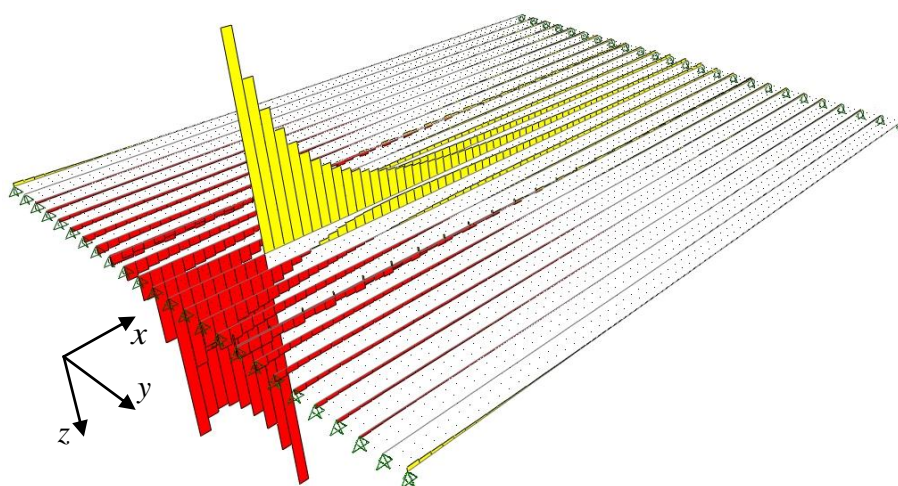


Figura 5.21 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras.

Carga a 1/8 de vão sobre a nervura central. Juntas não fendilhadas.

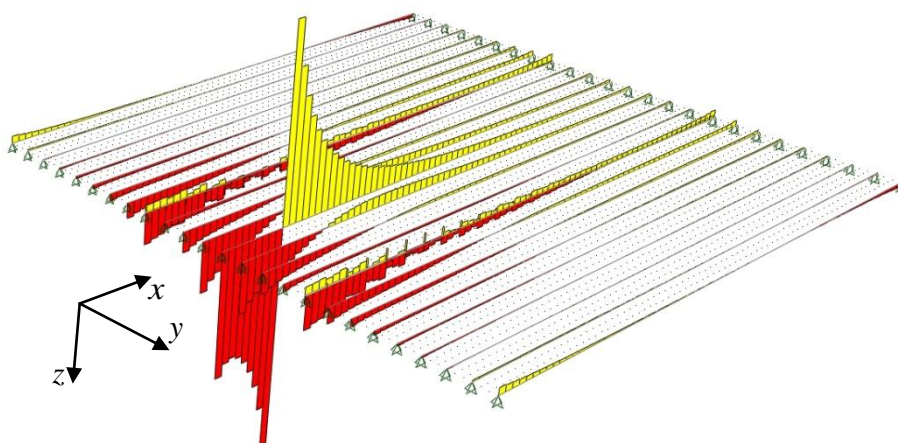


Figura 5.22 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras.

Carga a 1/8 de vão sobre a nervura central. Juntas fendilhadas.

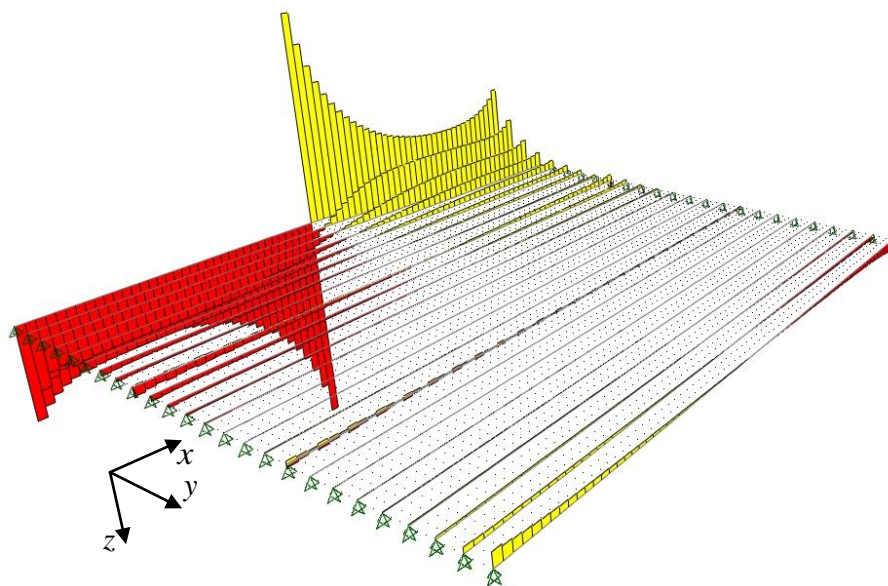


Figura 5.23 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras.
Carga a meio vão sobre a nervura de bordo. Juntas não fendilhadas.

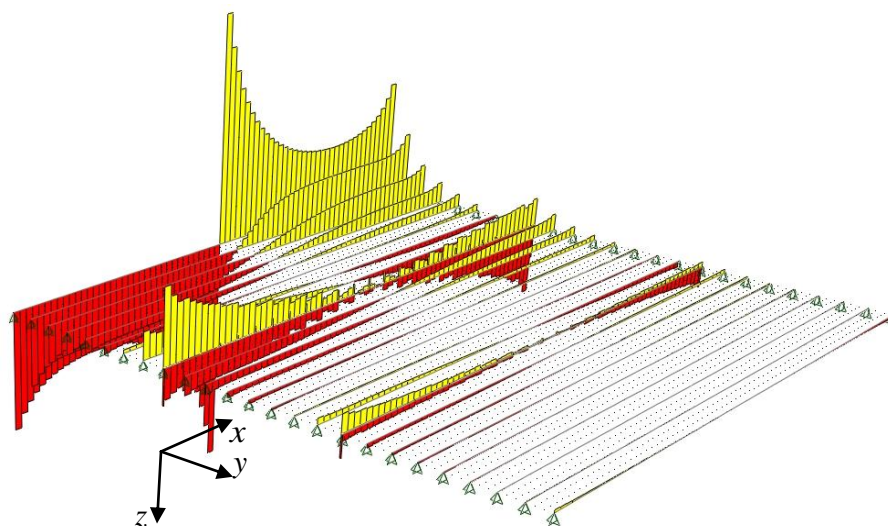


Figura 5.24 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras.
Carga a meio vão sobre a nervura de bordo. Juntas fendilhadas.

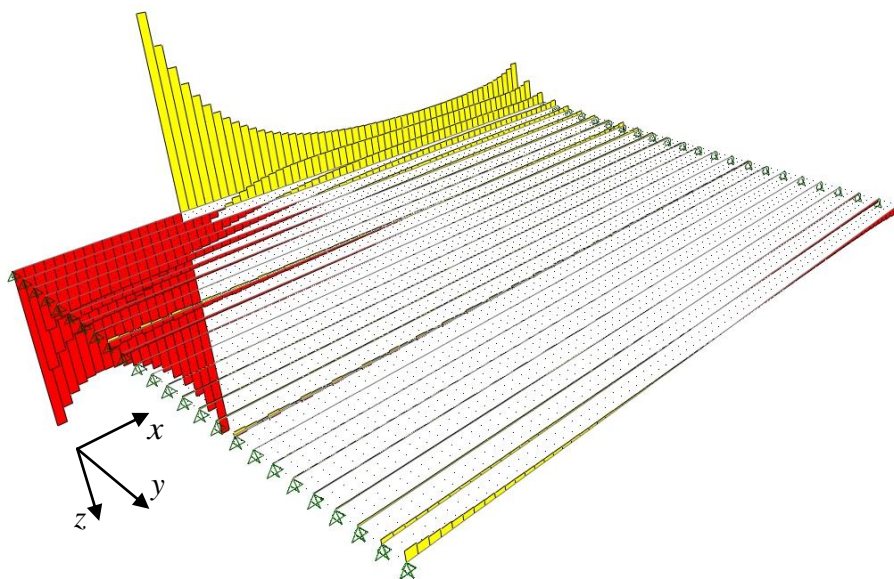


Figura 5.25 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras.
Carga a 1/4 de vão sobre a nervura de bordo. Juntas não fendilhadas.

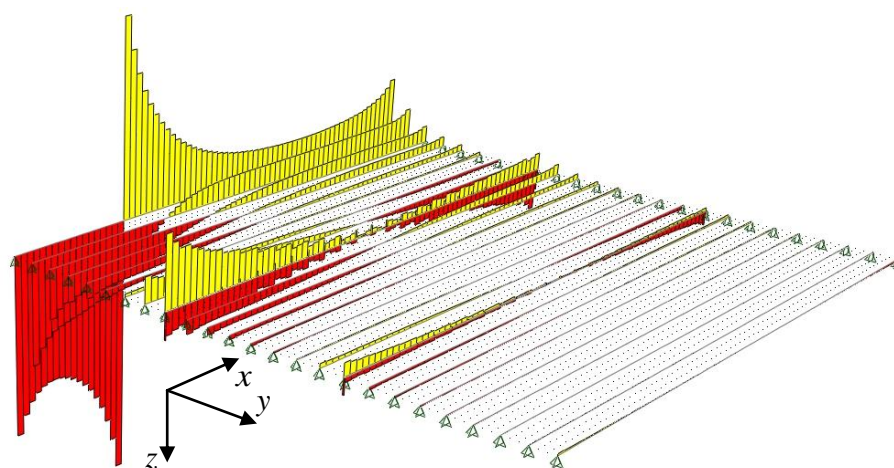


Figura 5.26 – Distribuição de esforço transverso pelas nervuras.
Carga a 1/4 de vão sobre a nervura de bordo. Juntas fendilhadas.

5.5 POSIÇÃO DO PONTO DE TENSÃO MÁXIMA

É necessário agora perceber em que ponto da nervura, perto da zona carregada, se encontram as tensões de corte máximas. Para isso, usou-se o modelo de sólidos sujeito a uma carga concentrada.

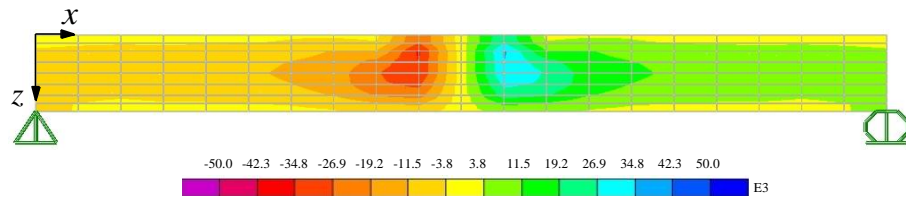


Figura 5.27 – Distribuição das tensões de corte pela nervura sujeita a carga pontual a meio vão.

Pode concluir-se deste estudo que o ponto de tensão máxima se encontra sensivelmente a meia altura da nervura e à mesma distância do ponto solicitado no plano horizontal. Este resultado não contabilizou a influência do pré-esforço pela simples razão de que esse efeito é benéfico para o critério considerado, pois tende a afastar este ponto da zona carregada. Posto isto, considerou-se que o esforço transversal actuante a considerar seria o calculado a uma distância de $h/2$ do ponto de aplicação da carga.

5.6 TRATAMENTO DOS RESULTADOS

Da análise dos modelos descritos no ponto 4 do capítulo da modelação obtiveram-se uma grande quantidade de resultados que necessitam de um tratamento rigoroso.

Para determinar a força de corte (V) no ponto pretendido, calculado anteriormente, fez-se a aproximação da curva obtida a uma equação de 3º grau (Figura 5.28), para depois retirar analiticamente o valor à distância $h/2$ da secção.

Para definir a equação de 3º grau, são necessárias quatro equações para obter cada uma das incógnitas que correspondem às constantes que definem o polinómio. No entanto, sabe-se que o parâmetro independente tem como significado físico o valor máximo do esforço transversal, ou seja, o valor na secção adjacente à secção carregada. Este valor é exactamente metade do valor da carga quando esta se encontra a meio vão no sentido longitudinal, mas à medida de que a carga se aproxima do apoio, este tem de ser calculado caso a caso.

A primeira dificuldade prendeu-se com o facto de o esforço transversal ter uma curva de crescimento muito acentuada na imediação do ponto solicitado, o que obrigou ao uso de uma malha muito apertada.

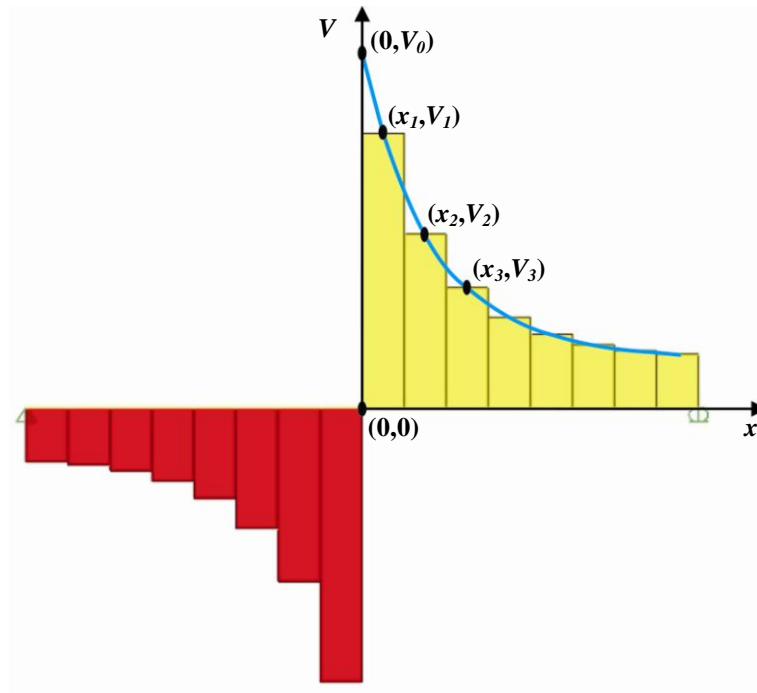


Figura 5.28 – Esquema da metodologia usada para dedução da equação.

Os refinamentos para os quais se obtiveram bons resultados (Figura 5.29) tornaram impossível a resolução dos modelos de média e grande dimensão, pois o hardware utilizado não suportava as exigências do cálculo. Para ultrapassar este problema, criou-se um algoritmo de extrapolação de resultados que permitiu usar uma malha menos densa sem perder precisão.

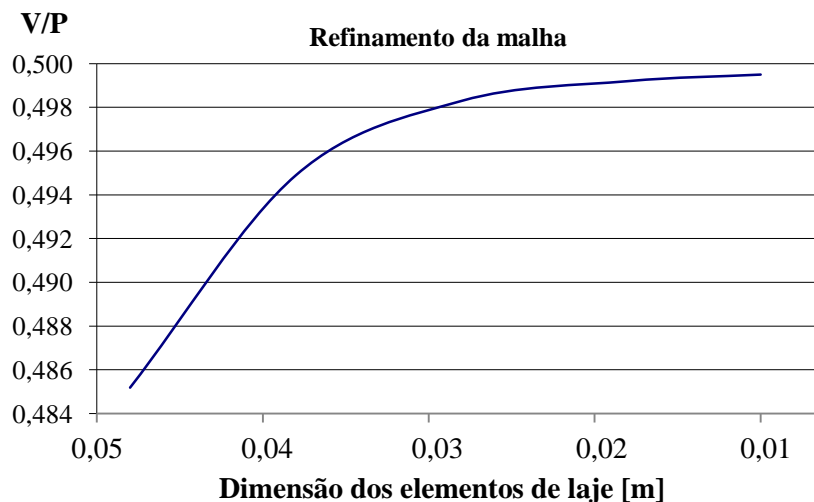


Figura 5.29 – Estudo de convergência de resultados para refinamento da malha.

Este processo surgiu da observação de que a diferença numérica entre o valor limite e o calculado pela malha pouco refinada se mantinha aproximadamente constante. Assim,

considerou-se que o valor do esforço transverso máximo numa determinada secção podia ser calculado da forma

$$V_{c,x} = (V_{t,mv} - V_{mv}) + V_x \quad (5.1)$$

Onde

$V_{t,mv}$ é o esforço transverso máximo teórico para um carregamento a meio vão

V_{mv} é o esforço transverso máximo medido para um carregamento a meio vão

V_x é o esforço transverso máximo medido para o carregamento pretendido

Pode verificar-se a validade deste método observando as tabelas seguintes

Tabela 5.1 – Aplicação do algoritmo de refinamento.

Carregamento	Não Refinado [V/P]	Refinado [V/P]	Algoritmo [V/P]
1/2 Vão	0,485	0,495	0,500
3/8 Vão	0,580	0,589	0,595
1/4 Vão	0,686	0,694	0,701
1/8 Vão	0,818	0,823	0,833

Para o cálculo das restantes incógnitas resolveu-se o sistema de três equações em ordem às mesmas e criou-se uma folha de cálculo onde foram inseridos os valores V_1 , V_2 , e V_3 retirados do programa de elementos finitos, assim como as posições x_1 , x_2 e x_3 (Figura 5.28).

Definida cada uma das constantes, calculou-se o valor do esforço transverso na posição pretendida, $h/2$ substituindo em cada uma das equações este valor numérico. Usou-se $d=0,10\text{m}$ e $d=0,25\text{m}$ para os elementos HCS20 e HCS50, respectivamente.

5.7 ANÁLISE GRÁFICA DAS DIVERSAS VARIÁVEIS

Para tirar conclusões da análise supracitada, os resultados foram organizados em gráficos que facilitam a comparação entre vários factores que influenciam a dispersão dos esforços transversos. A Figura 5.30 mostra esquematicamente o modelo ensaiado.

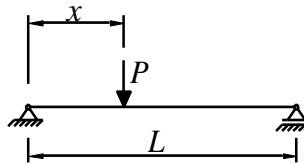


Figura 5.30 – Esquema explicativo da análise dos modelos.

5.7.1 ANÁLISE DOS MODELOS DE HCS20

Da observação do gráfico da Figura 5.30, percebe-se que a variação do esforço transversal na nervura à medida que a carga se aproxima do apoio é aproximadamente linear até ao ponto em que se perde capacidade de mobilizar tensões para a nervura vizinha. Isto acontece perto do apoio pois a transferência de forças dá-se essencialmente por deslocamentos impostos e, nesta situação, os deslocamentos são menos significativos. Quando se dá este fenómeno, nota-se um aumento de declive no gráfico. Percebe-se também que esta inflexão é mais notória para grandes vãos, sendo que para pequenos vãos a mudança de declive tende a suavizar-se aumentando, no entanto, o declive da fase linear.

Deslocando a carga para o bordo do painel, notam-se os mesmos fenómenos descritos no parágrafo anterior, com a diferença de que, neste caso, o esforço transversal tende a ser maior, devido ao facto de só haver dispersão da força num único sentido.

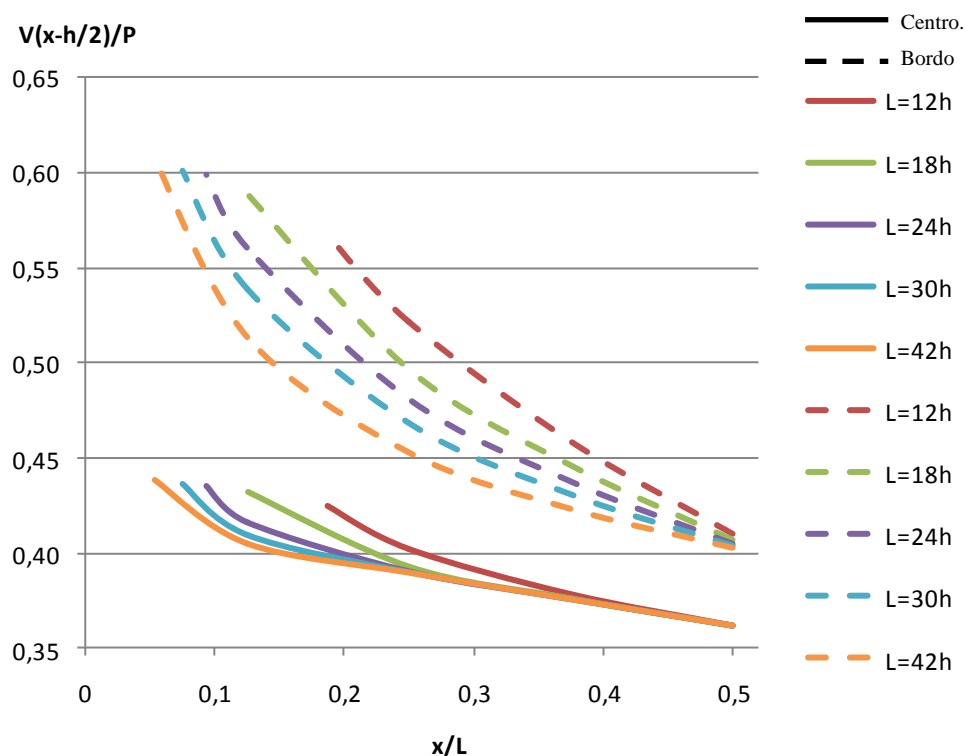


Figura 5.31 – Carga na nervura central e de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas não fendilhadas. Largura da laje $b=6h$.

Do gráfico da Figura 5.31 pode observar-se um aumento significativo no esforço transverso quando se passa de um carregamento na nervura central para um carregamento na nervura periférica. Este aumento é mais evidente à medida que a zona carregada se aproxima do apoio.

Para estudar a influência da largura do painel de laje na dissipação de esforço transverso, consideraram-se painéis de grandes vãos, pois verificou-se que era nesta situação que a importância dos painéis justapostos era mais notada.

A Figura 5.31 mostra a influência da quantidade de painéis laterais na dissipação lateral do esforço transverso. Comprova-se que a distribuição lateral do esforço transverso não é grandemente afectada pelo aumento do número de painéis justapostos, para além dos painéis adjacentes ao painel carregado.

Este efeito é ainda menos importante no caso de se tratar de um carregamento de bordo (Figura 5.31).

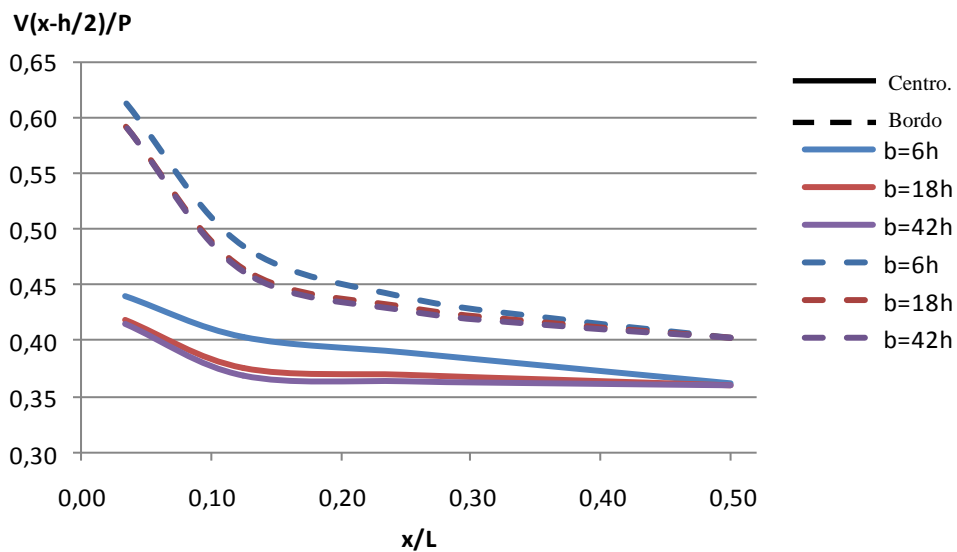


Figura 5.32 – Carga na nervura central e de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas não fendilhadas para diferentes larguras de painel de laje.

Recorrendo às conclusões anteriores, passou-se ao estudo do comportamento de lajes compostas por três painéis de laje alveolar justapostos lateralmente.

Na Figura (5.32) pode observar-se que o comportamento geral se mantém inalterado, excepto no facto de as fracções de esforço transverso na nervura solicitada ter reduzido ligeiramente.

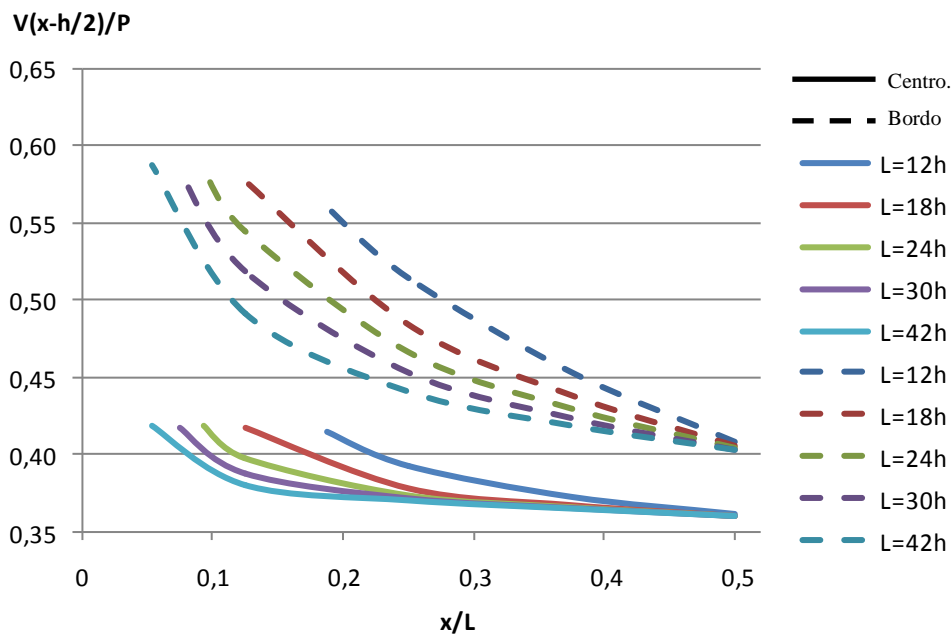


Figura 5.33 – Carga na nervura central e de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas não fendilhadas. Largura da laje $b=18h$.

De seguida verificar-se-á a importância da fendilhação das juntas nos valores de esforço transversal máximos.

Como se pode observar, comparando a Figura 5.34 com a Figura 5.31, para carregamentos na nervura central, o efeito da fendilhação não se faz notar, e no caso da nervura solicitada ser uma nervura periférica, o aumento é pouco significativo, rondando os 2,5%.

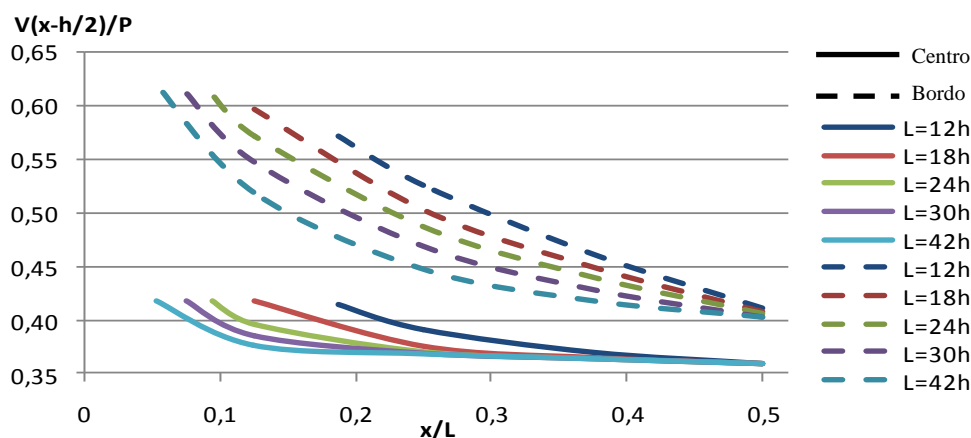


Figura 5.34 – Carga na nervura central e de bordo. Variação do esforço transversal em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas fendilhadas. Largura da laje $b=18h$.

De seguida estudar-se-á a distribuição de esforços no caso da solicitação se localizar na junta entre painéis. A Figura 5.35 mostra que, nas condições descritas, o esforço transversal se reparte de forma praticamente igual pelas duas nervuras concorrentes a esta junta.

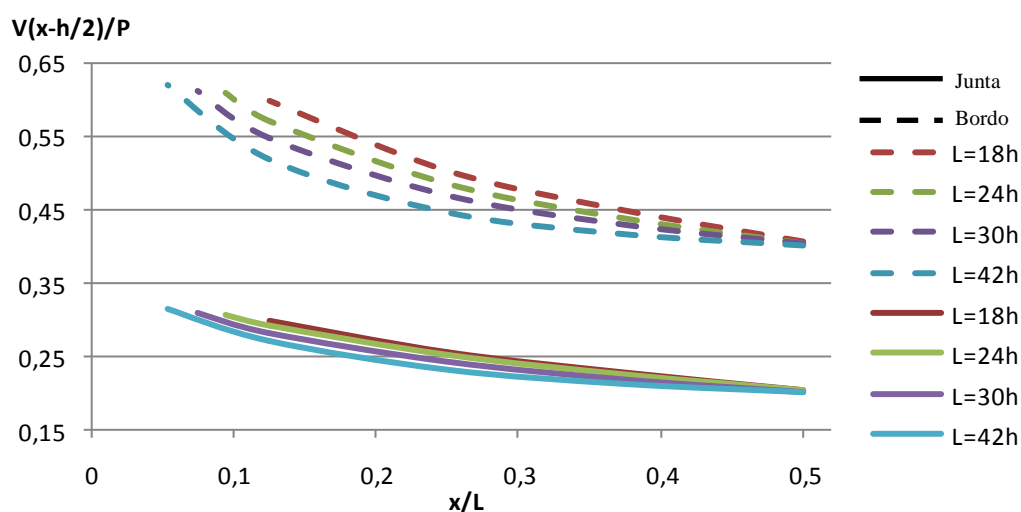


Figura 5.35 – Carga sobre a junta fendilhada e na nervura de bordo. Variação do esforço transversal em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas fendilhadas. Largura da laje $b=18h$.

Observando a figura é também possível concluir que o uso inadequado da repartição de esforços pelas nervuras concorrentes à junta solicitada pode trazer consequências graves. Como a solidez da junta depende exclusivamente do betão de enchimento, caso este não seja suficiente para resistir às forças de corte a que está sujeito, a carga numa das nervuras, pode duplicar instantaneamente.

Desta análise, conclui-se que podem existir vários tipos de rotura devido ao esforço transversal proveniente de cargas pontuais: rotura após fendilhação longitudinal, que pode dividir-se em rotura instantânea ou progressiva, e rotura sem fendilhação longitudinal, conforme esquematizado na Figura 5.36.

A primeira acontece quando, após fendilhação longitudinal, o aumento súbito do esforço transversal, devido à mudança de condição da nervura de nervura interior para nervura de bordo, leva a rotura súbita sem incremento de carga (Figura 5.36-1).

A rotura do segundo tipo ocorre quando, após fendilhação longitudinal, é necessário aumentar a carga até o elemento entrar em colapso (Figura 5.36-2).

O terceiro tipo acontece quando a carga de rotura por esforço transversal é inferior à carga de fendilhação por flexão (Figura 5.36-3).

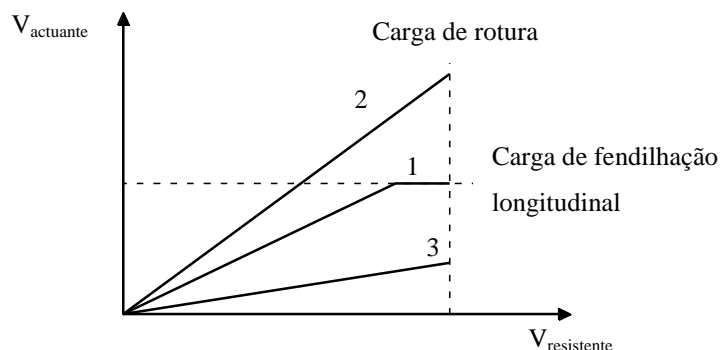


Figura 5.36 – Tipos de rotura devido ao punçoamento.

5.7.2 COMPARAÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS HCS20 E HCS50

As diferenças na capacidade de distribuição de cargas entre os dois elementos são visíveis nos gráficos seguintes.

É visível o efeito da baixa rigidez de corte do elemento HCS50 na fraca capacidade de distribuição lateral de tensões de corte. Esta diferença faz com que a nervura solicitada, absorva uma maior parte da carga.

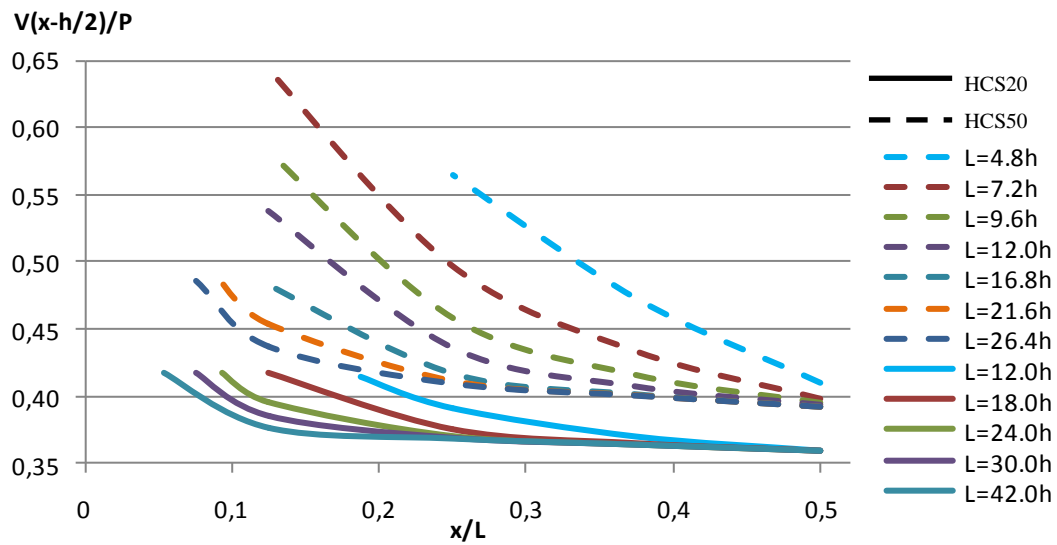


Figura 5.37 – Comparação entre HCS20 e HCS50. Carga na nervura central. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas fendilhadas. Largura da laje $b=3,6m$.

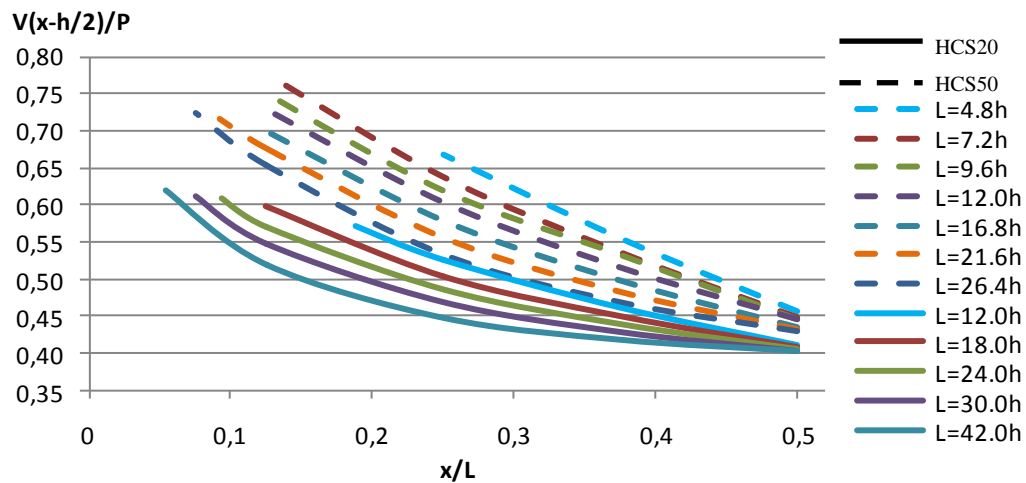


Figura 5.38 – Comparação entre HCS20 e HCS50. Carga na nervura de bordo. Variação do esforço transverso em função do ponto de aplicação da carga em painéis com juntas fendilhadas. Largura da laje $b=3,6m$.

5.8 INTERACÇÃO CORTE/TORÇÃO

Como já foi referido, o esforço transversal nas nervuras junto aos apoios aumenta devido às forças de canto provocadas pelos momentos torsores.

Para entender este fenómeno, ensaiaram-se elementos HCS20 com várias geometrias. Verifica-se que, para um carregamento na nervura central, este fenómeno não ocorre, pois a nervura central encontra-se numa linha de momento torsor nulo (Figura 5.37).

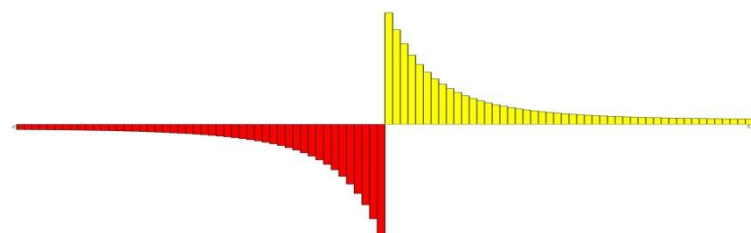


Figura 5.39 – Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada.
Carga a meio vão na nervura central.

No caso de um carregamento de bordo, a nervura solicitada encontra-se numa linha de momento torsor máximo, como se pode verificar nos gráficos da distribuição de esforços apresentados anteriormente (Figuras 5.12 e 5.13). Nesta situação, pode observar-se que o esforço transversal ao longo da nervura não é monótono (Figura 5.41).

Este efeito ganha importância à medida que a carga se aproxima do apoio, como sugere a sequência nas Figuras 5.64 a 5.67.

A Figura 5.40 representa esquematicamente a posição dos pontos de aplicação da carga para cada caso analisado, recorrendo a intersecções entre os eixos verticais 1, 2, 3 e 4 e os eixos horizontais a), b), c) e d).

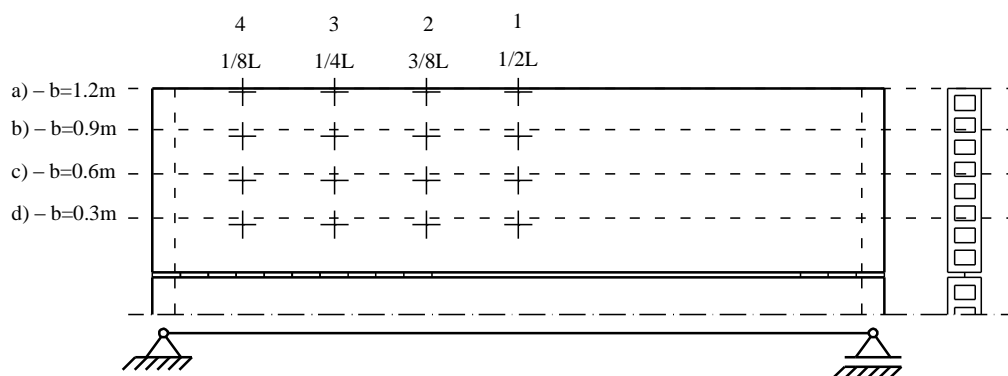


Figura 5.40 – Esquema da posição dos pontos de aplicação da carga.

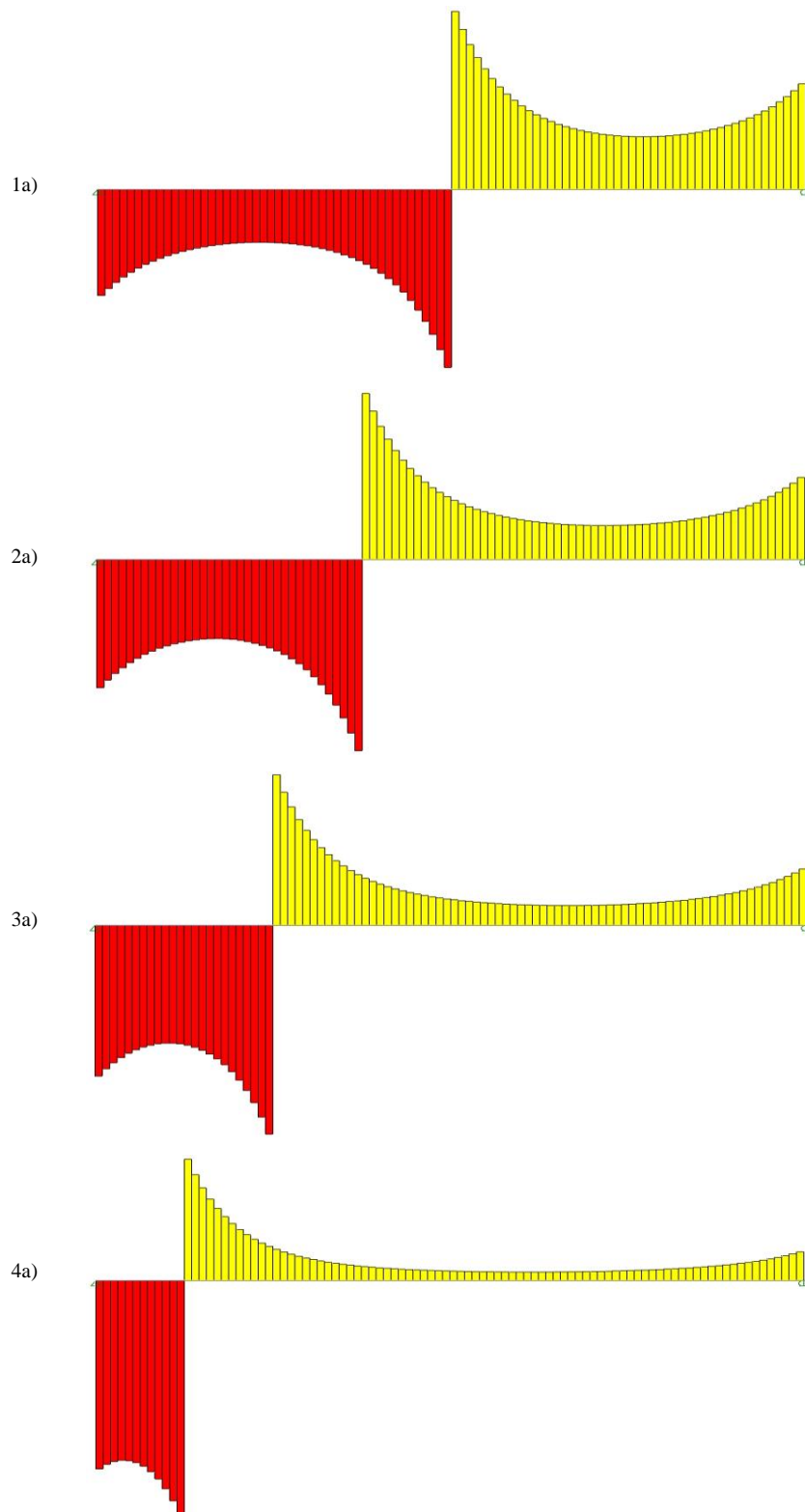


Figura 5.41 – Laje HCS20. Variação de esforço transverso ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos a) e para um vão de 4,8m.

Nos casos em que a laje não tem a largura total, o que pode acontecer em diversas situações, desde aberturas na laje, ou mesmo no caso de existir fendilhação longitudinal

devido à carga concentrada, o efeito da interação corte/torção ganha importância, podendo mesmo nalguns casos o esforço transversal junto ao apoio ultrapassar o valor obtido na zona da solicitação.

As sequências seguintes mostram o efeito da diminuição da largura da laje de bordo.

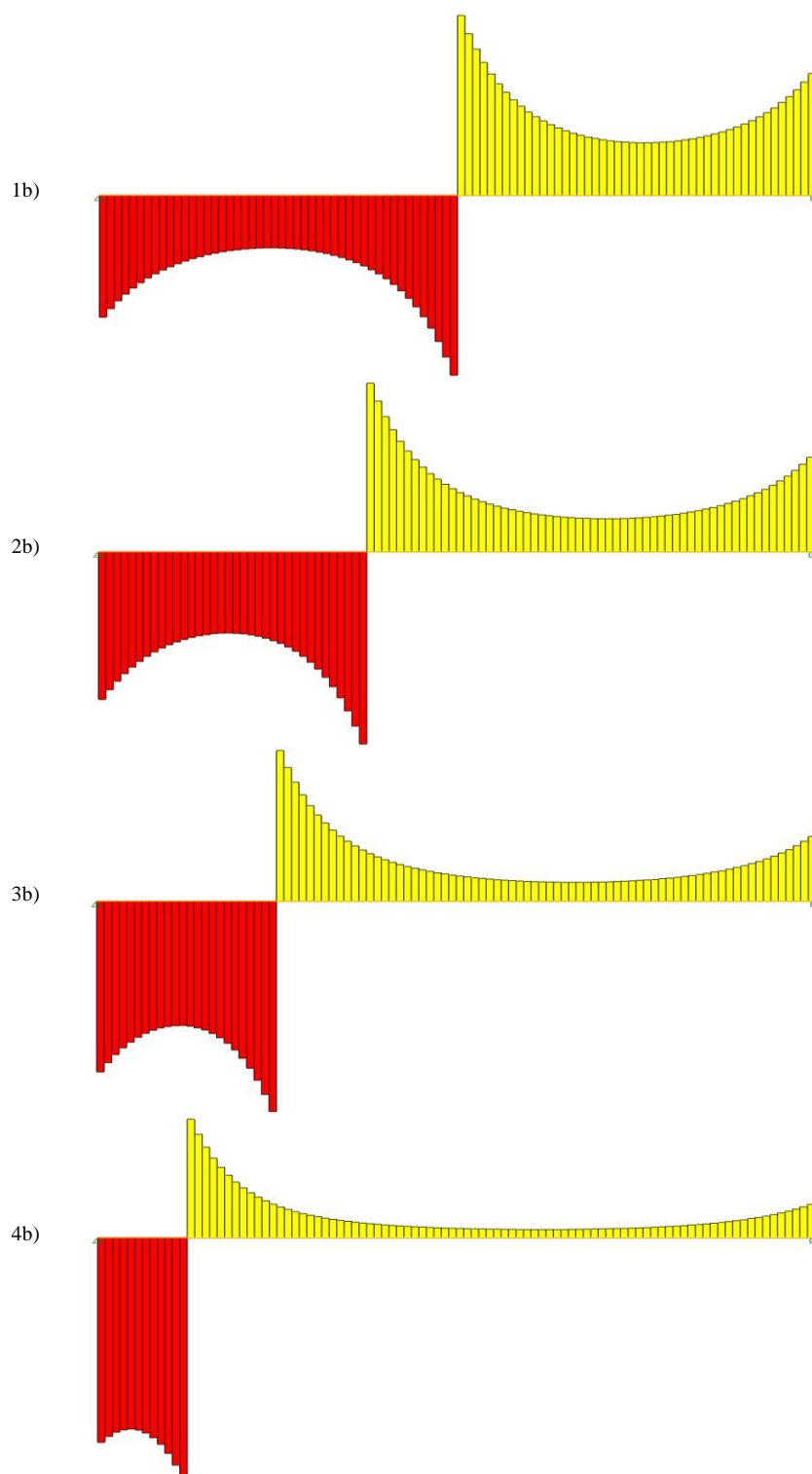


Figura 5.42 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos b) e para um vão de 4,8m.

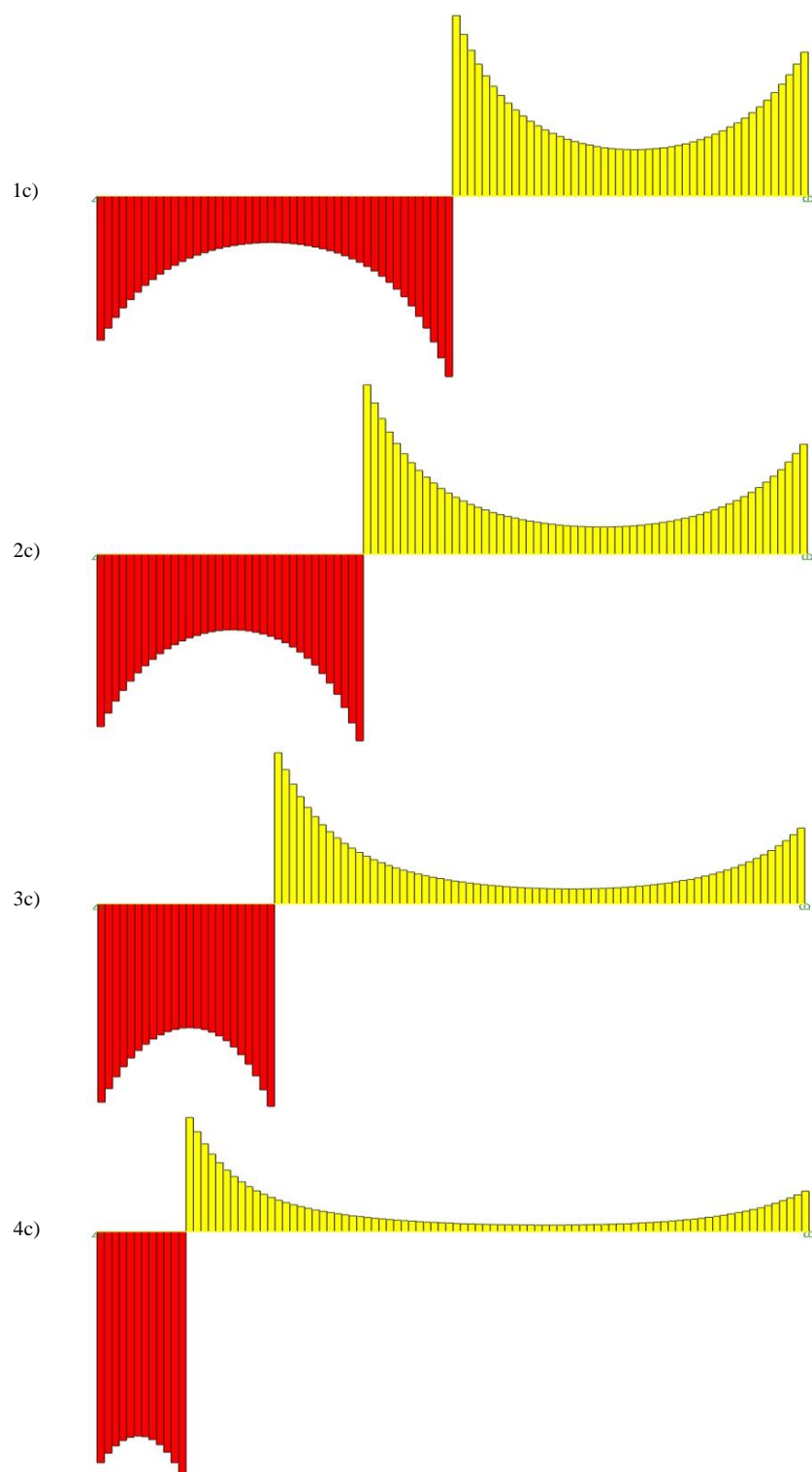


Figura 5.43 – Laje HCS20. Variação de esforço transverso ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos c) e para um vão de 4,8m.

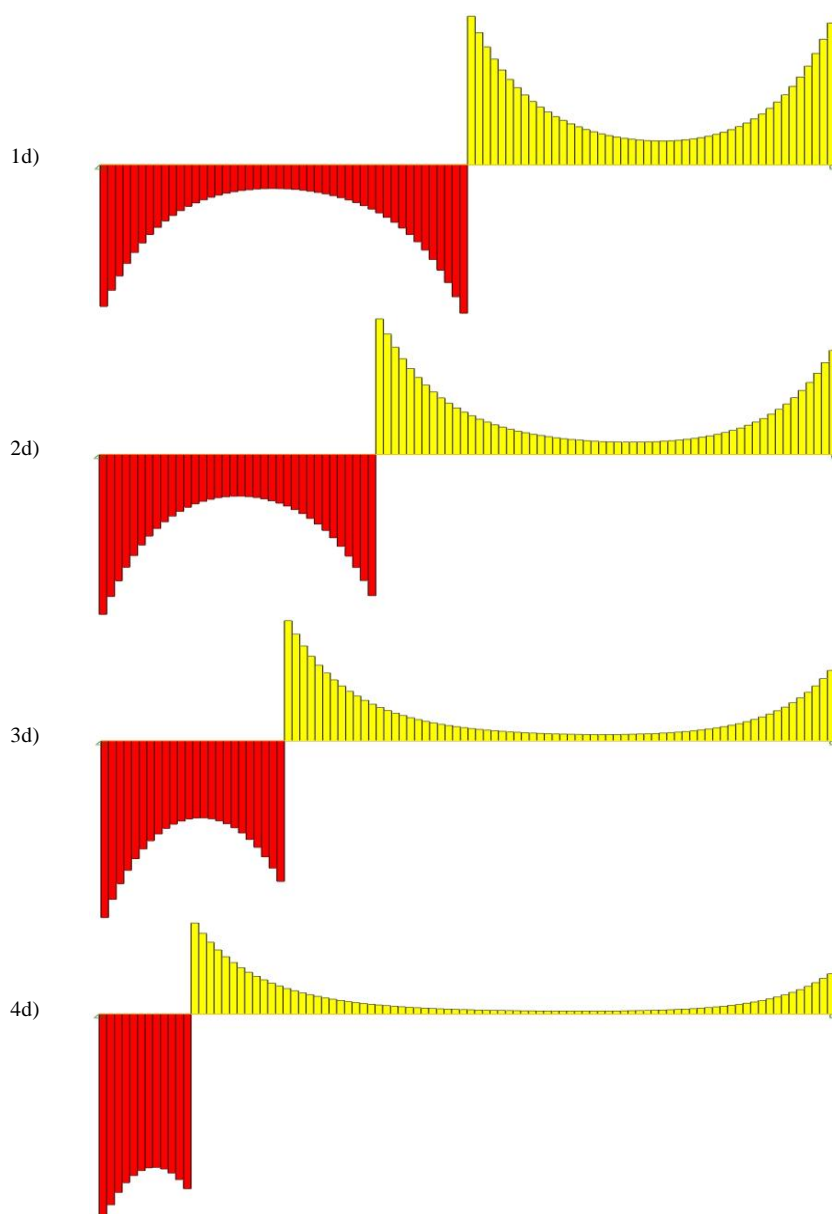


Figura 5.44 – Laje HCS20. Variação de esforço transverso ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos d) e para um vão de 4,8m.

A seguinte tabela mostra os valores máximos do esforço transverso para cada caso.

Tabela 5.2 – HCS20 com vão de 4,8m. Fracção máxima de esforço transverso para cada caso na zona de aplicação da carga e no apoio.

	V/P para b=1,2m		V/P para b=0,9m		V/P para b=0,6m		V/P para b=0,3m	
	Carga	Apoio	Carga	Apoio	Carga	Apoio	Carga	Apoio
1/2Vão	0,50	0,31	0,50	0,35	0,50	0,40	0,50	0,48
3/8Vão	0,53	0,37	0,53	0,41	0,52	0,49	0,51	0,57
1/4Vão	0,58	0,42	0,58	0,48	0,57	0,56	0,54	0,67
1/8Vão	0,66	0,53	0,67	0,57	0,68	0,64	0,66	0,77

As figuras que se seguem, mostram a influência do aumento do vão no fenómeno considerado.

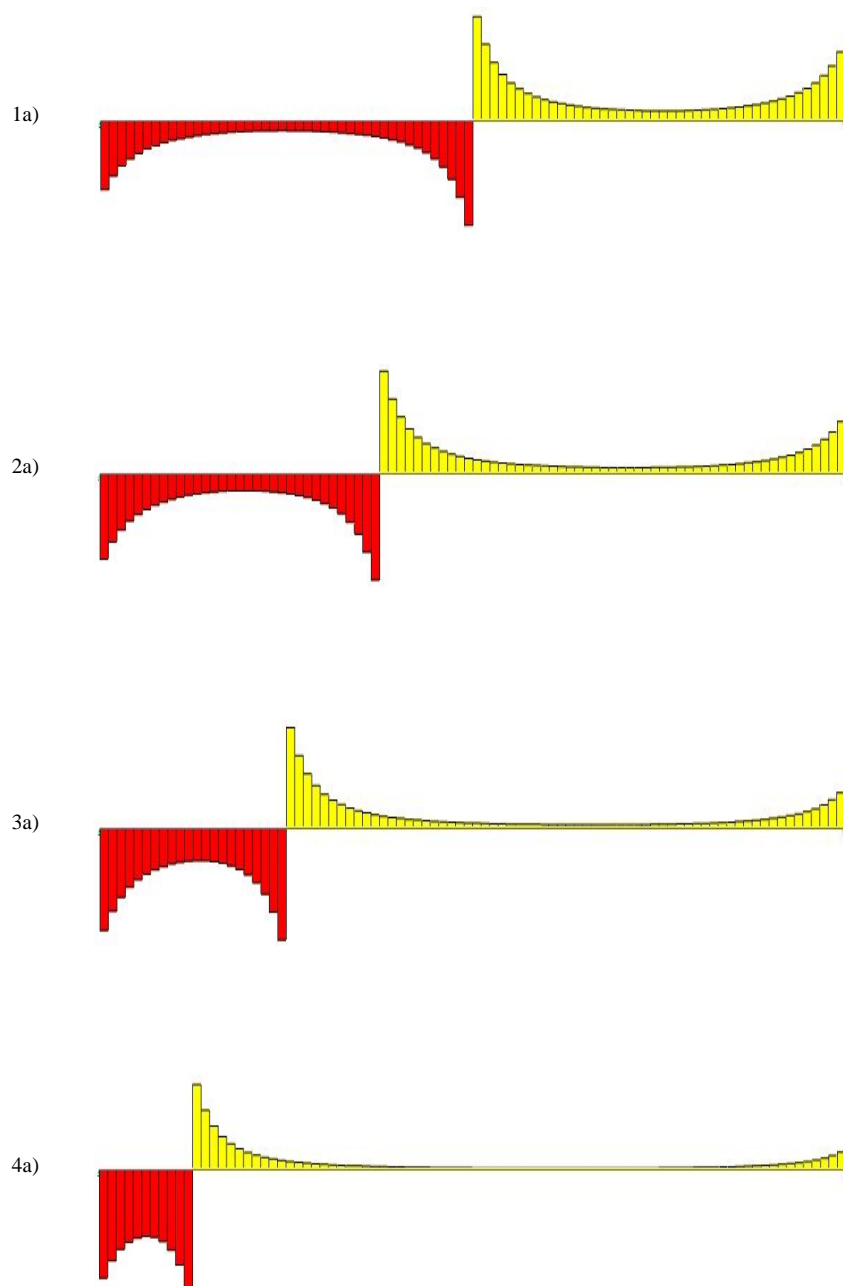


Figura 5.45 – Laje HCS20. Variação de esforço transverso ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos a) e para um vão de 13,2m.

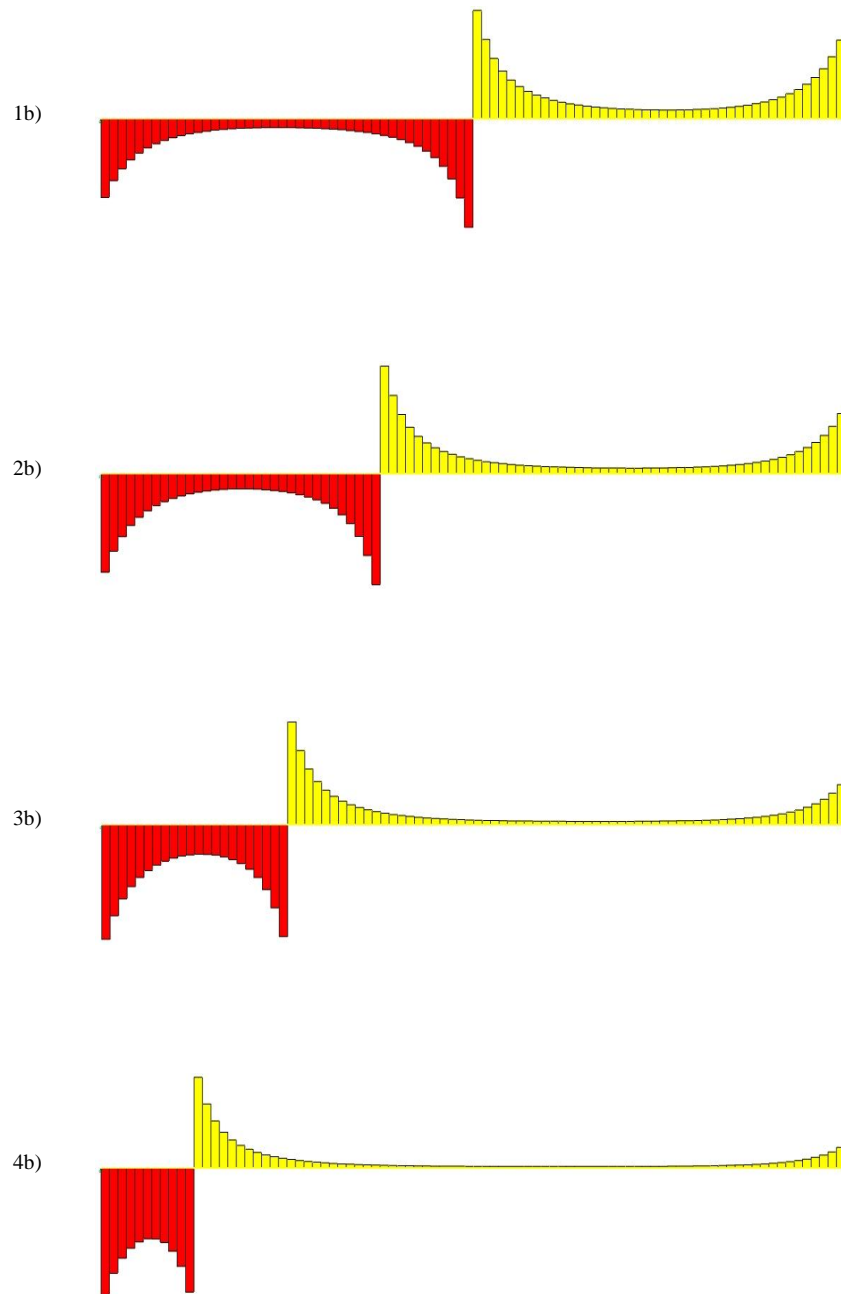


Figura 5.46 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos b) e para um vão de 13,2m.

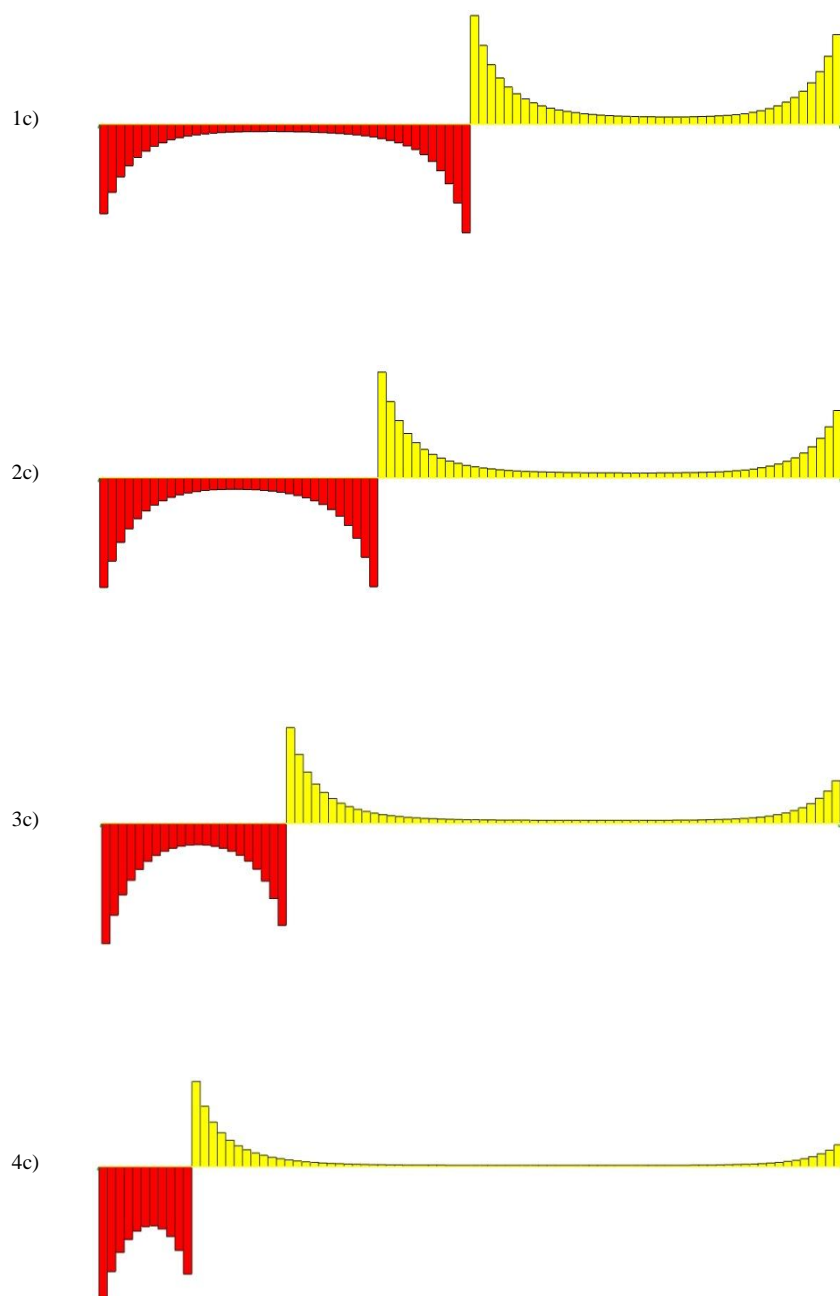


Figura 5.47 – Laje HCS20. Variação de esforço transversal ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos c) e para um vão de 13,2m.

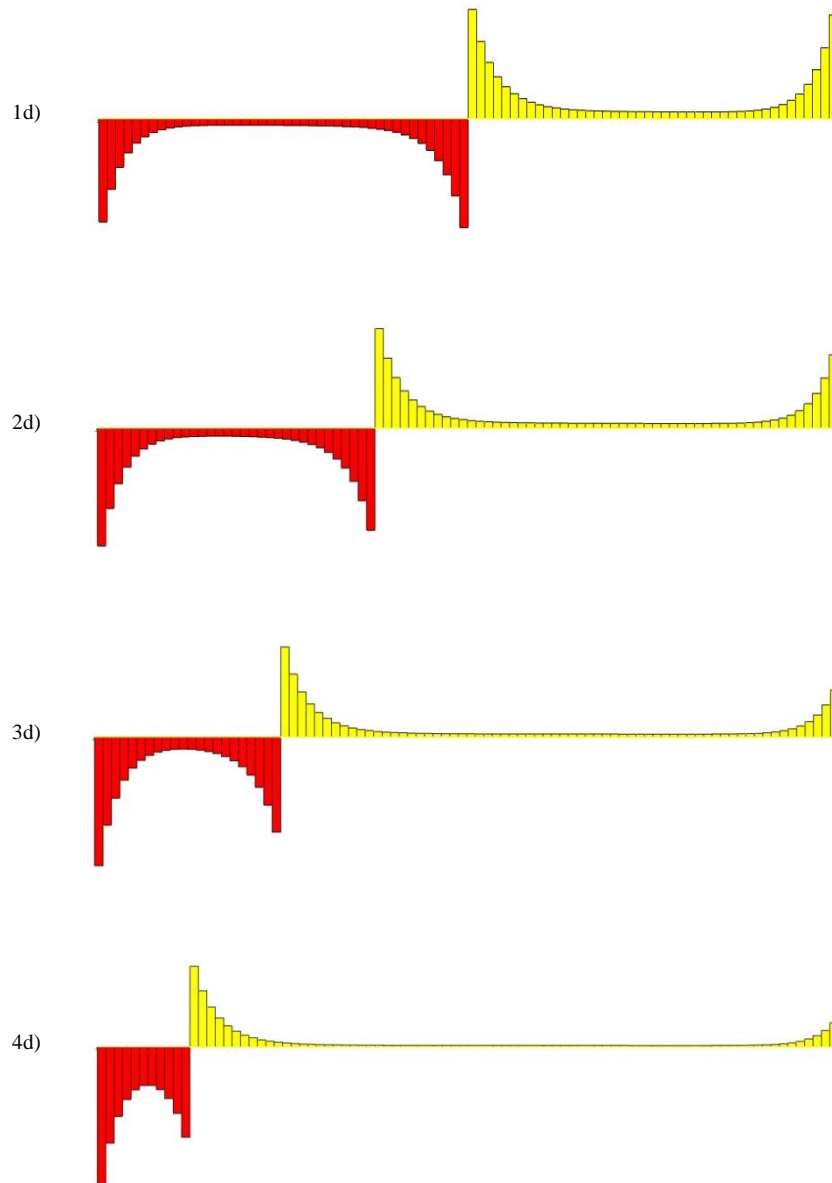


Figura 5.48 – Laje HCS20. Variação de esforço transverso ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos c) e para um vão de 13,2m.

A seguinte tabela mostra os valores de esforço transverso máximo para cada um dos casos apresentados

Tabela 5.3 – HCS20 com vão de 13,2m. Fração máxima de esforço transverso para cada caso na zona de aplicação da carga e no apoio..

	V/P para b=1,2m		V/P para b=0,9m		V/P para b=0,6m		V/P para b=0,3m	
	Carga	Apoio	Carga	Apoio	Carga	Apoio	Carga	Apoio
1/2Vão	0,50	0,36	0,50	0,38	0,50	0,43	0,50	0,48
3/8Vão	0,51	0,42	0,51	0,46	0,51	0,51	0,51	0,57
1/4Vão	0,52	0,48	0,52	0,53	0,51	0,59	0,51	0,66
1/8Vão	0,58	0,53	0,57	0,58	0,55	0,67	0,53	0,76

Para concluir, analisou-se a importância do tipo de elemento, considerando agora um elemento HCS50.

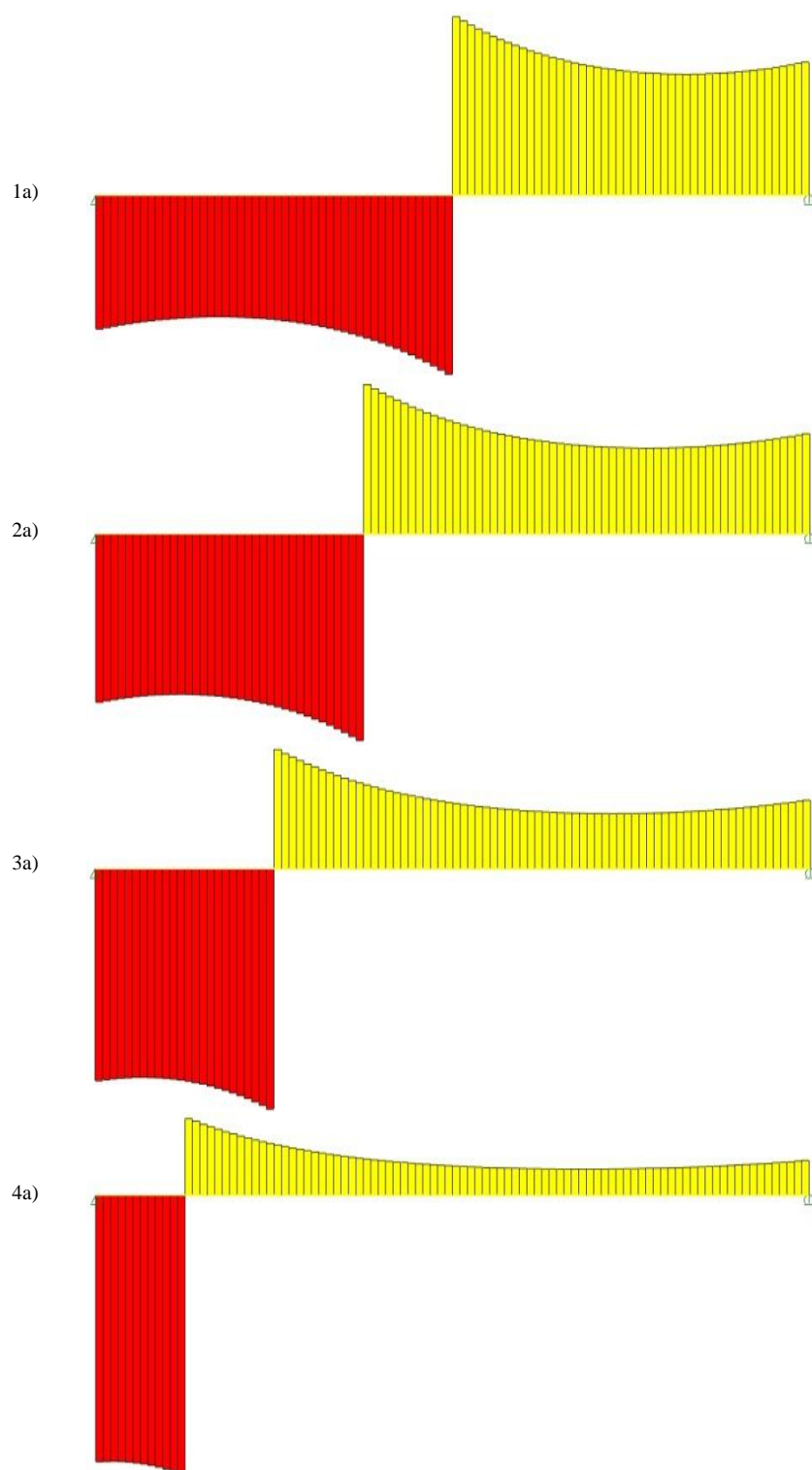


Figura 5.49 – Laje HCS50. Variação de esforço transverso ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos a) e para um vão de 4,8m.

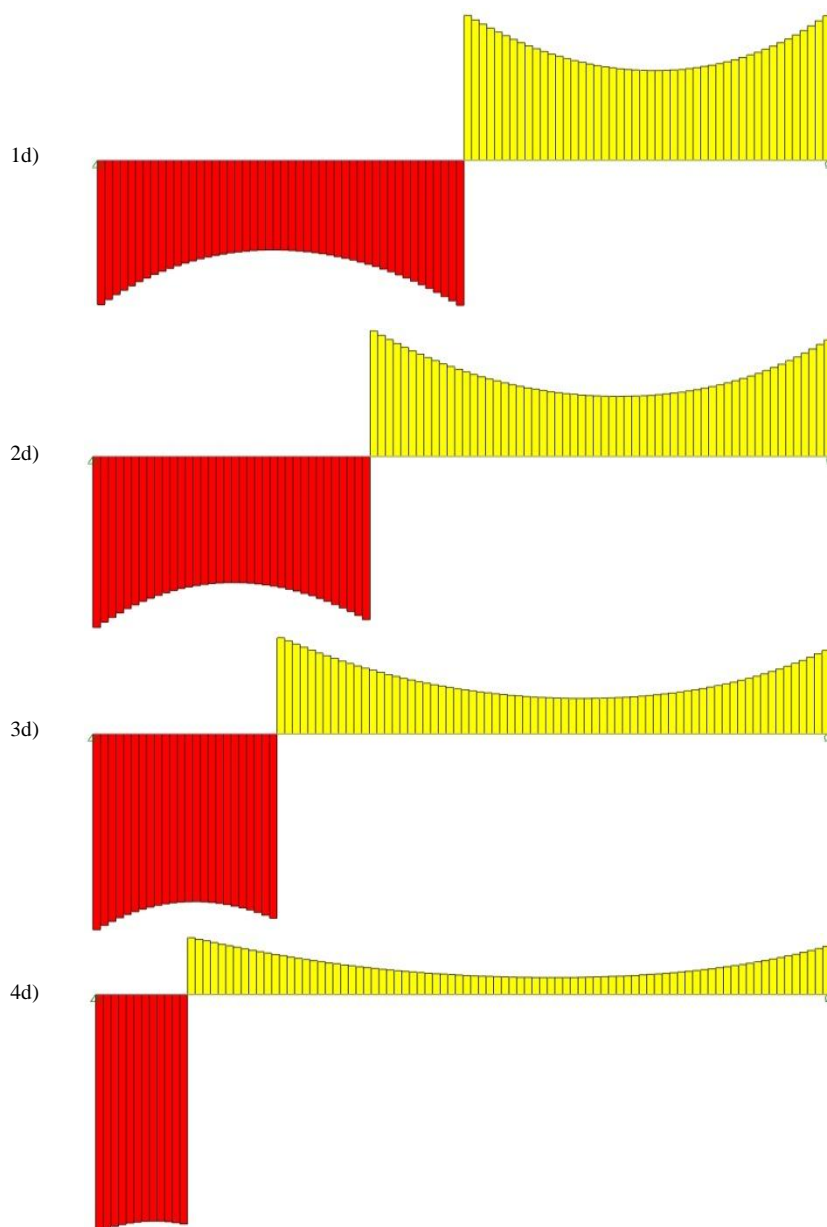


Figura 5.50 – Laje HCS50. Variação de esforço transverso ao longo da nervura carregada para a sequência de carregamentos d) e para um vão de 4,8m.

A tabela que se segue mostra os valores de esforço transverso máximo para cada situação estudada.

Tabela 5.4 – HCS50 com vão de 4,8m. Fracção máxima de esforço transverso para cada caso na zona de aplicação da carga e no apoio.

	V/P para b=1,2m		V/P para b=0,9m		V/P para b=0,6m		V/P para b=0,3m	
	Carga	Apoio	Carga	Apoio	Carga	Apoio	Carga	Apoio
1/2Vão	0,50	0,38	0,50	0,42	0,50	0,47	0,50	0,50
3/8Vão	0,58	0,47	0,58	0,51	0,59	0,57	0,57	0,59
1/4Vão	0,67	0,59	0,68	0,63	0,69	0,68	0,66	0,70
1/8Vão	0,78	0,75	0,80	0,77	0,82	0,81	0,80	0,83

Para melhor interpretar os resultados obtidos, recorreu-se a gráficos que mostram de forma sintética os resultados obtidos.

Pode observar-se pelo gráfico da Figura 5.51 que a largura do painel de bordo assume uma enorme importância neste fenómeno, sendo mesmo o modo de rotura predominante no caso de painéis estreitos.

Da comparação das Figuras 5.51 e 5.52 conclui-se também que o aumento do vão é também um factor de agravamento deste fenómeno, o que leva a crer que a geometria em planta da laje de bordo é determinante.

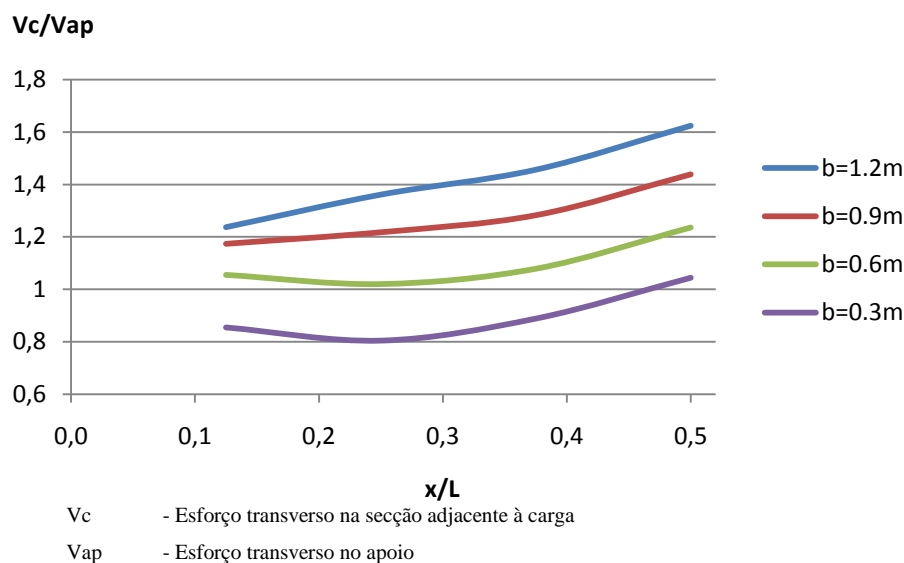


Figura 5.51 – Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na importância da interacção corte/torção relativamente ao punçoamento para vãos de 4,8m.

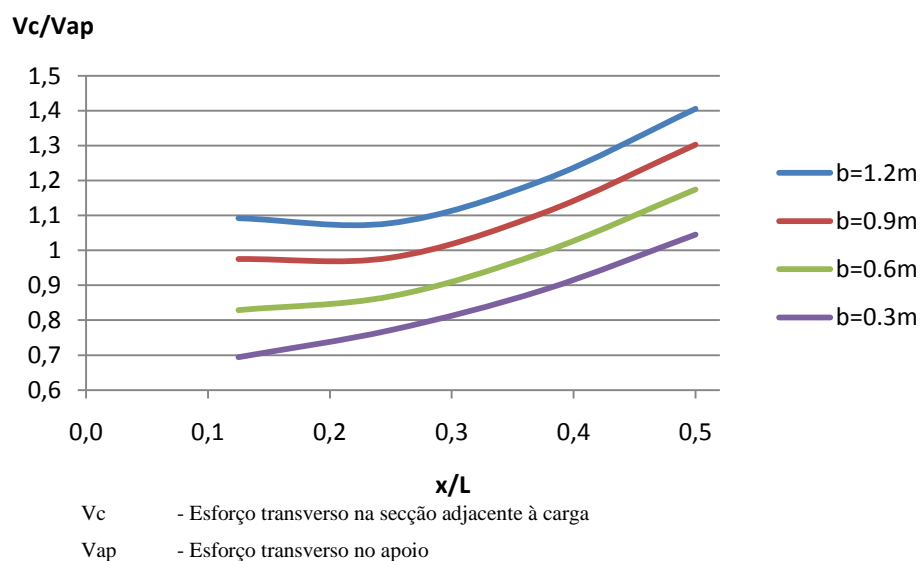


Figura 5.52 – Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na importância da interacção corte/torção relativamente ao punçoamento para vãos de 13,2m.

Comparando agora os valores para a zona solicitada e a zona do apoio, observa-se uma quase perfeita linearidade na progressão do esforço transversal devido à interacção corte/torção. Outro factor importante é a diferença de forças nos dois pontos considerados para o mesmo carregamento, sendo que no caso mais visível, o esforço transversal devido ao fenómeno em estudo é superior em mais de 10% quando comparada com a zona carregada. A linearidade parece ainda mais evidente caso se considerem vãos de grandes dimensões, assim como a diferença entre as fracções de esforço transversal nos pontos considerados, sendo que neste caso, a maior diferença sobe para cerca de 22.5%

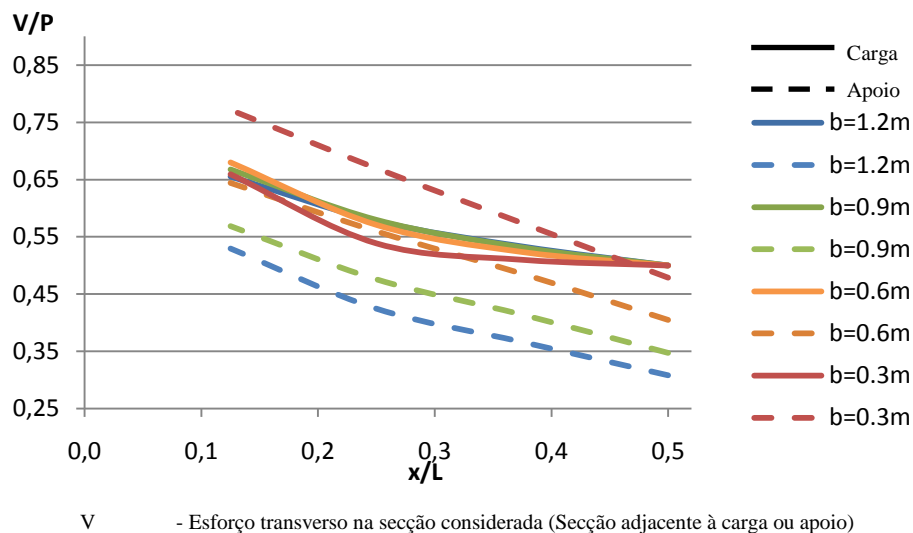


Figura 5.53 – Comparação entre o valor do esforço transversal na secção adjacente à carga e no apoio. Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na variação do esforço transversal em função do ponto de aplicação da carga para vãos de 4,8m.

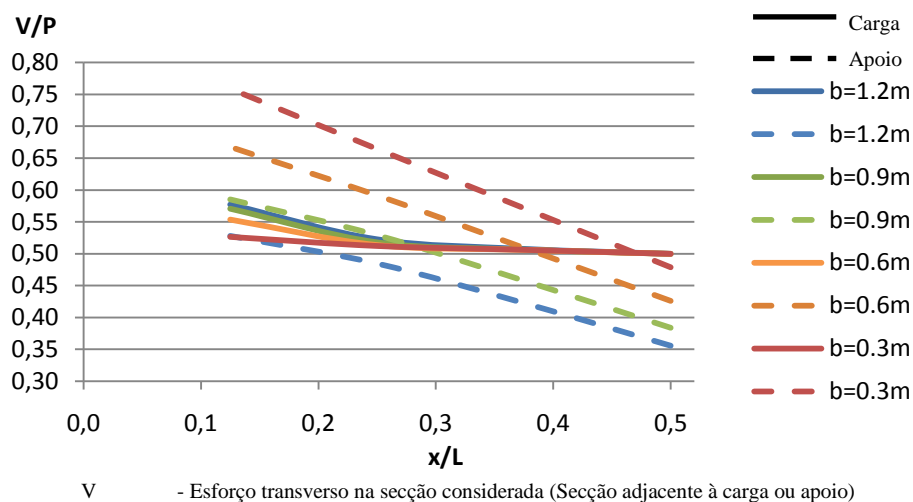


Figura 5.54 – Comparação entre o valor do esforço transversal na secção adjacente à carga e no apoio. Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na variação do esforço transversal em função do ponto de aplicação da carga para vãos de 13,2m.

Pelo gráfico da Figura 5.55, conclui-se que existe uma convergência para cada uma das larguras consideradas. À medida que a posição da carga se aproxima do apoio, o valor de esforço transversal actuante tende a convergir independentemente do vão. Pode observar-se que, para a menor largura do painel, as linhas que definem os dois vãos são praticamente coincidentes. Isto sugere que este patamar é o limite máximo do esforço transversal actuante na nervura.

A análise dos painéis de laje HCS50 permitem chegar a conclusões semelhantes às anteriores.

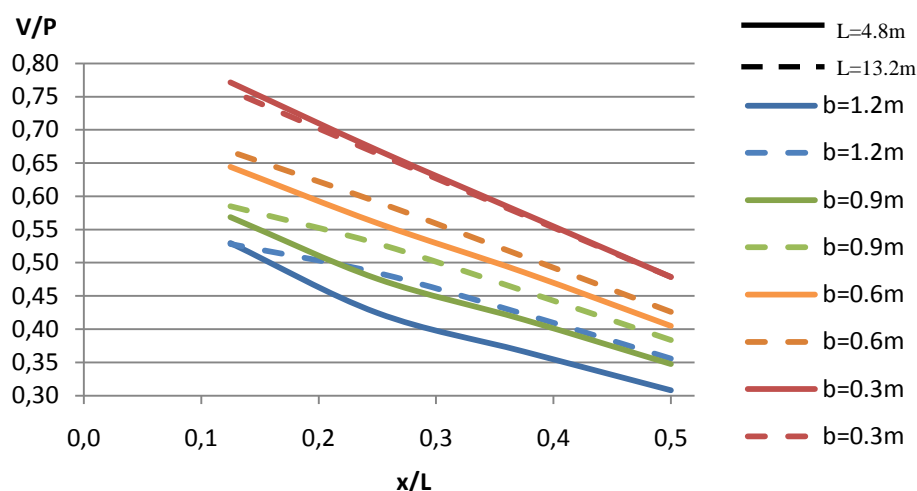


Figura 5.55 – Comparação entre o valor do esforço transversal no apoio para vãos de 4,8m e 13,2m. Influência da largura do painel de bordo e da posição longitudinal da carga na variação do esforço transversal em função do ponto de aplicação da carga.

5.9 PROPOSTA PARA CÁLCULO DO ESFORÇO TRANVERSO ACTUANTE

Conclui-se que para uma carga concentrada a actuar num painel de laje alveolar devem ser verificadas duas situações: rotura por punçoamento na zona carregada e rotura por interacção corte/torção junto ao apoio. Com base nos gráficos das Figuras 5.53, 5.54 e 5.55 definiram-se expressões de rectas que aproximam o valor da percentagem de esforço transversal actuante na nervura para cada um dos casos considerados.

Sugere-se para cálculo da percentagem de esforço transversal actuante na zona de aplicação da carga a expressão

$$\frac{V}{P_{ed}} = A^{1/4} - A^{1/2} \frac{x}{L} \quad (5.2)$$

onde

$$A = 0.35 \frac{h}{h_0} \quad (5.3)$$

sendo $h_0 = 200\text{mm}$ a espessura de referência.

Os gráficos das Figuras 5.56 e 5.57 mostram o ajuste da proposta aos valores obtidos analiticamente.

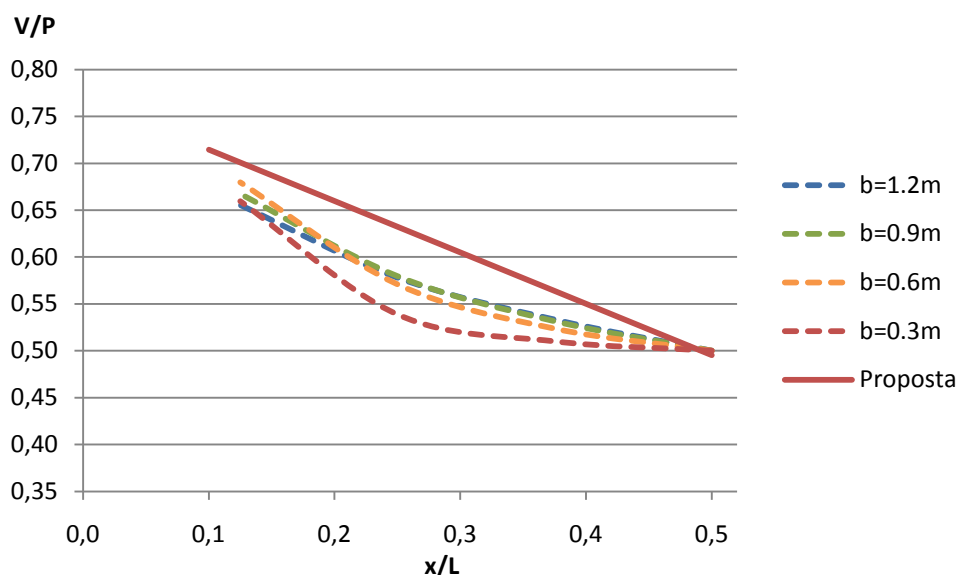


Figura 5.56 – Proposta de cálculo da percentagem de Esforço Transverso actuante na zona de acção da carga na nervura solicitada. HCS20; $L=4.8\text{m}$.

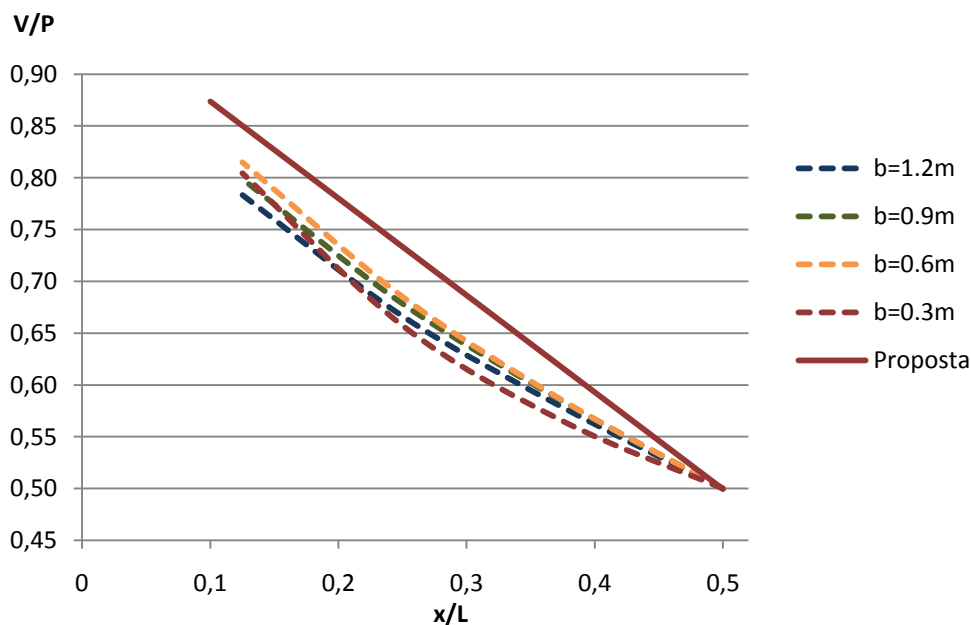


Figura 5.57 – Proposta de cálculo da percentagem de Esforço Transverso actuante na zona de acção da carga na nervura solicitada. HCS50; $L=4.8\text{m}$.

Para o cálculo da percentagem de esforço transversal actuante na zona do apoio, sugere-se a expressão

$$\frac{V}{P_{ed}} = \left(1 - 0,9 \frac{x}{L}\right) \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^{0.3} \quad \text{com } h/b \leq 0.85 \quad (5.4)$$

As Figuras 5.58 e 5.59 mostram o ajuste da proposta aos valores obtidos analiticamente.

Pode concluir-se que as propostas se ajustam satisfatoriamente.

Conclui-se também que as expressões que definem as rectas aproximadas são muito semelhantes à expressão do esforço transversal em vigas simplesmente apoiadas sujeitas a uma carga concentrada.

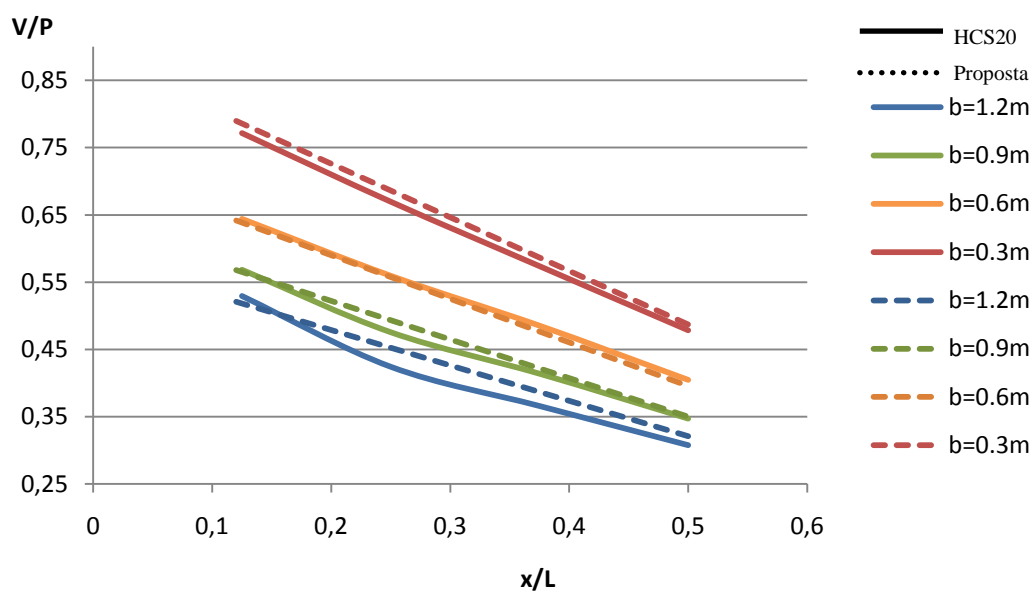


Figura 5.58 – Proposta de cálculo da percentagem de Esforço Transverso actuante na zona do apoio na nervura solicitada. HCS20; $L=4.8m$

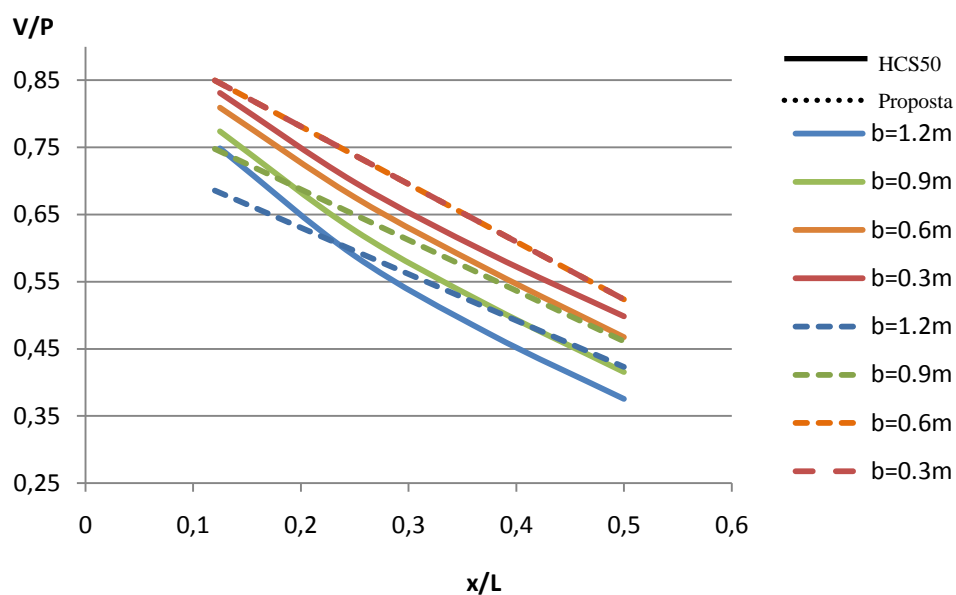


Figura 5.59 – Proposta de cálculo da percentagem de Esforço Transverso actuante na zona de acção da carga na nervura solicitada. HCS50; $L=4.8m$

Propõe-se, portanto, o uso da expressão (5.2) para determinar a percentagem de esforço transverso actuante na zona de acção da carga na nervura solicitada e o uso da expressão (5.4) para determinar a percentagem de esforço transverso actuante na zona do apoio na mesma nervura, de forma a comparar com os valores obtidos pela EN1168:2005+A1:2008 [5] para verificação da segurança.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Far-se-á neste capítulo a síntese das conclusões tiradas ao longo deste trabalho de investigação e apresentar-se-á propostas para a continuidade desta investigação.

6.1 CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS E A SUA INFLUÊNCIA

A heterogeneidade mecânica nas direcções principais e o facto de existir armadura unicamente segundo o eixo longitudinal são os factores determinantes no comportamento das lajes alveolares, quando sujeitas a uma solicitação pontual. A distribuição dos esforços rege-se por um princípio básico de que as zonas de maior rigidez absorvem uma percentagem de tensões proporcional à relação entre a sua rigidez e as restantes. Apesar da variação entre as características mecânicas de flexão ser desprezável, o mesmo não acontece com a rigidez de corte.

O elemento HCS20 apresenta as seguintes relações entre rigidezes

$$\frac{D_x}{D_y} = 1,06 \quad (6.1)$$

$$\frac{K_{Vx}}{K_{Vy}} = 6,48 \quad (6.2)$$

Sendo o elemento HCS50 ainda mais desequilibrado, apresentando os seguintes valores

$$\frac{D_x}{D_y} = 1,18 \quad (6.3)$$

$$\frac{K_{Vx}}{K_{Vy}} = 20,24 \quad (6.4)$$

Estes resultados mostram que estes elementos têm particular dificuldade em transmitir carga na direcção transversal, concentrando-a ao longo da nervura onde actua a solicitação.

Esta fraca rigidez de corte na direcção transversal deve-se à geometria alveolar. Conclui-se portanto que a geometria do alvéolo é determinante, sendo esta a grande responsável pela rigidez de corte na direcção transversal. É previsível que a betonagem

cuidada dos alvéolos adjacentes à nervura carregada aumente significativamente a rigidez de corte transversal, aumentando a capacidade de distribuição lateral de esforços.

A previsão das rigidezes por métodos expeditos é particularmente eficaz para alvéolos de geometria regular e preferencialmente angulosos ou com cantos de pequeno raio de curvatura, sendo, contudo, possível encontrar geometrias rectangulares equivalentes para os alvéolos circulares ou elípticos.

Neste trabalho apresenta-se, além da quantificação numérica das diferentes rigidezes, propostas para a quantificação expedita, de forma analítica destas grandezas.

6.2 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E POSIÇÃO DA CARGA

Observando os resultados da modelação analítica, conclui-se que a abordagem feita ao comportamento dos elementos após fendilhação das juntas entre painéis é acertada pois as deformadas obtidas são do mesmo tipo das observadas em trabalhos experimentais. Pode então concluir-se que, uma vez fendilhada, a junta entre painéis deixa de transmitir esforços de flexão continuando, contudo, a ser possível transmitir esforço transversal até que se dê a rotura do betão de ligação.

Quanto à percentagem de esforço transversal absorvido pela nervura solicitada, conclui-se que os extremos deste valor (valores máximos e mínimos) não dependem do vão do painel de laje considerado; contudo, a monotonia do diagrama de esforços depende deste factor, aumentando a linearidade à medida que o vão se torna menor.

Transversalmente, à medida que a posição da carga, se desloca do centro do painel para o bordo, aumenta a percentagem de esforço transversal absorvida pela nervura solicitada em cerca de 20%. Isto deve-se à impossibilidade de transmitir esforços lateralmente, para ambos os lados da nervura.

Numa laje composta por vários painéis individuais de HCS, a distribuição de esforço transversal é apenas condicionada pelos painéis adjacentes ao painel solicitado. Esta conclusão reduz os tipos de painéis considerados em dois tipos: painéis de bordo e painéis interiores. Os painéis de bordo são todos os que apresentam um bordo livre sendo todos os outros incluídos no segundo grupo.

Conclui-se também que a fendilhação das juntas entre os painéis de laje não influencia fortemente a concentração de esforço transversal, sendo até imperceptível quando o carregamento se dá num painel interior.

Quando a solicitação se encontra sobre a junta entre painéis, como esperado, as forças de corte são igualmente distribuídas entre as duas nervuras concorrentes à ligação. Contudo, caso ocorra rotura do betão de ligação, pode ficar toda a carga aplicada numa só nervura, disparando o valor do esforço transverso a que esta fica sujeita para cerca do dobro.

As conclusões tiradas são válidas para os dois tipos de elemento estudados, contudo, devido ao maior desequilíbrio entre as rigidezes do elemento HCS50, este apresenta valores de concentração de esforço transverso superiores, mantendo o mesmo padrão comportamental.

6.3 INTERACÇÃO CORTE/TORÇÃO

O fenómeno da interacção corte/torção é determinante na avaliação do comportamento de lajes alveolares sujeitas a cargas pontuais. Isto deve-se à existência de elevados momentos torsores que, como se sabe da teoria de lajes, provocam forças de corte importantes nos cantos da laje.

Os momentos torsores de maior importância acontecem para carregamentos de bordo onde, devido à impossibilidade de transmitir esforços de torção por fendilhação das juntas entre painéis, se concentram maioritariamente no painel solicitado, aumentando o valor da força de canto.

Para carregamentos em nervuras interiores, na provável eventualidade de surgir uma fenda longitudinal no alvéolo concorrente à nervura solicitada, esta passa a funcionar como nervura de bordo e por isso está também sujeita a este fenómeno.

É portanto necessário ter em conta, para a verificação de segurança, a interacção corte/torção para qualquer solicitação. Concluiu-se que este fenómeno ganha importância à medida que o vão aumenta e a largura do painel de bordo diminui, assim como com a aproximação da carga da zona do apoio. Deve ter-se em conta que, mesmo nos casos em que o esforço transverso é maior na zona de aplicação da carga, a rotura pode dar-se por interacção corte/torção pois vai depender do valor resistente em cada uma das secções. Este valor é previsivelmente mais baixo na zona do apoio devido à transferência da força de pré-esforço

6.4 PROPOSTA DE CÁLCULO DO ESFORÇO TRANSVERSO ACTUANTE

Conclusivamente, propõem-se expressões para estimar o esforço transverso actuante nas zonas condicionantes da nervura.

Sugere-se a utilização da expressão (5.2) para estimar o esforço transverso actuante na zona de acção da carga na nervura solicitada e a expressão (5.4) para estimar esta grandeza na zona do apoio na mesma nervura, para que se possa ter um valor passível de ser comparado com os valores do esforço transverso resistente presentes na norma EN1168:2005+A1:2008 [5].

6.5 PROPOSTAS PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Propõe-se que futuramente se avaliem aspectos importantes ainda por compreender no comportamento de lajes alveolares sujeitas a cargas concentradas.

Um aspecto importante é a análise experimental das lajes para verificar a veracidade e aplicabilidade das conclusões tiradas e das soluções propostas. Embora exista já algum trabalho experimental efectuado por Martins [4], será necessário efectuar ensaios em lajes com camada de betão complementar e estudar a forma de monitorizar as nervuras para medir as tensões instaladas e quantificar o esforço transverso actuante, para assim poder comparar com os valores determinados pelos processos usados no presente trabalho

O aspecto da ocorrência de fendilhação longitudinal é também importante dado a alteração que este fenómeno introduz nas forças actuantes. A compreensão da tendência do aparecimento e da localização da fenda pode ser muito importante para a previsão do mecanismo de rotura.

A tensão efectiva instalada nos fios ou cabos de pré-esforço é também uma incógnita, sendo este valor, assim como o comprimento e a forma de transferência do pré-esforço do aço para o betão. Este valor é um factor importante no cálculo do esforço transverso resistente na zona do apoio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Aswad, Alex; Jacques, Francis J.; “Behaviour of Hollow-Core Slabs Subject to Edge Loads”; PCI Journal; V37 No2; Março - Abril 1992. p. 72-84.
- [2] Pajari, Matti; “Resistance of Prestressed Hollow Core Slabs Against Web Shear Failure”; VVT Research Notes 2292; 2005.
- [3] Micallef, P.; “Assessment of Shear Capacity of Pre-stressed Hollow Core Floor Units in the Local Constructons Industry; Junho 2005.
- [4] Martins, Sílvia; “Comportamento de Lajes Alveoladas Sujeitas a Cargas Concentradas”; Dissertação para Obtenção de Grau de Mestre em Engenharia de Estruturas; Maio 2006; IST-UTL.
- [5] CEN; EN1168:2005+A12008; “Precast Concrete products – Hollow core slabs”; 2008.
- [6] CEN; EN 1992-1-1; “Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings”; Dezembro 2004
- [7] Ugural, Ansel; “Stresses in Plates and Shells”; McGraw-Hill International Editions; Singapura 1999.
- [8] CEN; EN1168:2005; “Precast Concrete products – Hollow core slabs”; Maio 2005.
- [9] Yang, Lin; “Design of Prestressed Hollow core Slabs with Reference to Web Shear Failure”; ASCE Journal of Structural Engineering, 1994; Vol. 120, No. 9, pp. 2675-2696.
- [10] “CSI Analysis Reference Manual for SAP2000®”; CSI (Cumputers & Structures INC.; Abril 2007.

O cálculo do esforço transversal resistente implica o conhecimento de características das lajes alveolares que, no caso de não serem fornecidas pelo fabricante, podem ser difíceis de quantificar, como é o caso da área, momento estático e o momento de inércia da secção acima do ponto crítico.

Seguem-se propostas para o cálculo destes parâmetros para a secção do alvéolo acima do ponto crítico em função das dimensões dos eixos e da forma do mesmo.

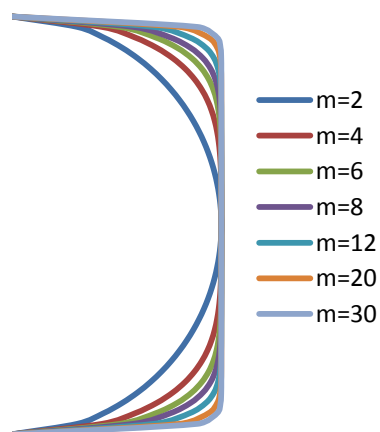
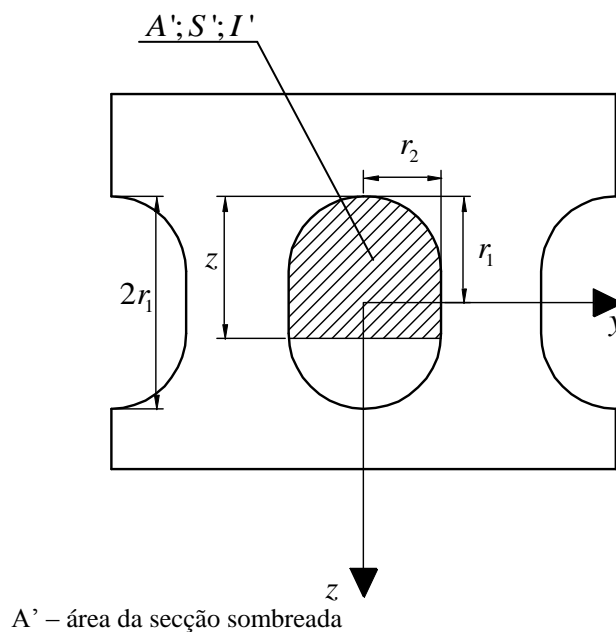


Figura A1.1 – Forma do alvéolo



A' – área da secção sombreada

S' – momento estático da secção sombreada

I' – momento de inércia da secção sombreada

Figura A1.2 – Esquema explicativo das grandezas envolvidas no cálculo de A' , S' e I' .

Tabela A1.1 – Constante de área da secção sombreada do alvéolo

C_A		m														
		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$x/2r$	0.1	0.02936	0.0401	0.04796	0.05385	0.05860	0.06253	0.06584	0.06837	0.07093	0.07313	0.07505	0.07673	0.07822	0.07954	0.08073
		0.08175	0.10898	0.12631	0.13851	0.14755	0.15449	0.15994	0.16427	0.16786	0.17082	0.17330	0.17541	0.17721	0.17878	0.18014
		0.14775	0.19144	0.21672	0.23313	0.24449	0.25273	0.25892	0.26371	0.26753	0.27062	0.27319	0.27534	0.27717	0.27875	0.28013
	0.2	0.22365	0.28194	0.31276	0.33144	0.34376	0.35240	0.35878	0.36365	0.36750	0.37061	0.37318	0.37534	0.37717	0.37875	0.38013
		0.30709	0.37717	0.41130	0.43098	0.44361	0.45236	0.45876	0.46365	0.46750	0.47061	0.47318	0.47534	0.47717	0.47875	0.48013
	0.3	0.39634	0.47505	0.51086	0.53089	0.54359	0.55235	0.55876	0.56365	0.56750	0.57061	0.57318	0.57534	0.57717	0.57875	0.58013
		0.48996	0.57426	0.61076	0.63088	0.64359	0.65235	0.65876	0.66365	0.66750	0.67061	0.67318	0.67534	0.67717	0.67875	0.68013
	0.4	0.58674	0.67405	0.71074	0.73087	0.74359	0.75235	0.75876	0.76365	0.76750	0.77061	0.77318	0.77534	0.77717	0.77875	0.78013
		0.68557	0.77402	0.81074	0.83087	0.84359	0.85235	0.85876	0.86365	0.86750	0.87061	0.87318	0.87534	0.87717	0.87875	0.88013
	0.5	0.78540	0.87402	0.91074	0.93087	0.94359	0.95235	0.95876	0.96365	0.96750	0.97061	0.97318	0.97534	0.97717	0.97875	0.98013
		0.88523	0.97402	1.01074	1.03087	1.04359	1.05235	1.05876	1.06365	1.06750	1.07061	1.07318	1.07534	1.07717	1.07875	1.08013
	0.6	0.98406	1.07399	1.11074	1.13087	1.14359	1.15235	1.15876	1.16365	1.16750	1.17061	1.17318	1.17534	1.17717	1.17875	1.18013
		1.08084	1.17378	1.21073	1.23087	1.24359	1.25235	1.25876	1.26365	1.26750	1.27061	1.27318	1.27534	1.27717	1.27875	1.28013
	0.7	1.17446	1.27299	1.31063	1.33086	1.34359	1.35235	1.35876	1.36365	1.36750	1.37061	1.37318	1.37534	1.37717	1.37875	1.38013
		1.26370	1.37087	1.41018	1.43077	1.44357	1.45235	1.45876	1.46365	1.46750	1.47061	1.47318	1.47534	1.47717	1.47875	1.48013
	0.8	1.34715	1.46610	1.50873	1.53031	1.54343	1.55230	1.55874	1.56364	1.56750	1.57061	1.57318	1.57534	1.57717	1.57875	1.58013
		1.42305	1.55660	1.60476	1.62861	1.64269	1.65198	1.65860	1.66358	1.66747	1.67060	1.67317	1.67533	1.67717	1.67875	1.68013
	0.9	1.48905	1.63905	1.69518	1.72324	1.73963	1.75022	1.75758	1.76302	1.76714	1.77040	1.77306	1.77526	1.77713	1.77873	1.78011
		1.54143	1.7080	1.77353	1.80790	1.82858	1.84218	1.85168	1.85892	1.86407	1.86809	1.87131	1.87394	1.87613	1.87796	1.87953
	1	1.57080	1.74804	1.82149	1.86175	1.88718	1.90471	1.91752	1.92729	1.93500	1.94122	1.94636	1.95067	1.95434	1.95750	1.96026

$$A' = 2C_A r_1 r_2$$

Tabela A1.2 – Constante de momento estático da secção sombreada do alvéolo

C_s		m														
		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$x/2r$	0.1	0.02761	0.03791	0.04512	0.05068	0.05517	0.05889	0.06203	0.06472	0.06704	0.06907	0.07085	0.07243	0.07384	0.07509	0.07619
		0.0720000	0.09613	0.11157	0.12251	0.13067	0.13696	0.14193	0.14594	0.14923	0.15196	0.15427	0.15624	0.15793	0.15940	0.16069
		0.12140	0.15789	0.17932	0.19343	0.20334	0.21061	0.21615	0.22048	0.22396	0.22680	0.22917	0.23118	0.23289	0.23438	0.23568
	0.2	0.170667	0.21667	0.24171	0.25731	0.26785	0.27540	0.28105	0.28544	0.28894	0.29180	0.29417	0.29618	0.29789	0.29938	0.30068
		0.21651	0.26901	0.29590	0.31206	0.32277	0.33037	0.33605	0.34044	0.34394	0.34680	0.34917	0.35118	0.35289	0.35438	0.35568
	0.3	0.25662	0.31304	0.34070	0.35701	0.36776	0.37537	0.38104	0.38544	0.38894	0.39180	0.39417	0.39618	0.39789	0.39938	0.40068
		0.28936	0.34776	0.37566	0.39201	0.40276	0.41037	0.41604	0.42044	0.42394	0.42680	0.42917	0.43118	0.43289	0.43438	0.43568
	0.4	0.31353	0.37270	0.40065	0.41701	0.42776	0.43537	0.44104	0.44544	0.44894	0.45180	0.45417	0.45618	0.45789	0.45938	0.46068
		0.32835	0.38770	0.41565	0.43201	0.44276	0.45037	0.45604	0.46044	0.46394	0.46680	0.46917	0.47118	0.47289	0.47438	0.47568
	0.5	0.333333	0.392699	0.42065	0.43701	0.44776	0.45537	0.46104	0.46544	0.46894	0.47180	0.47417	0.47618	0.47789	0.47938	0.48068
		0.32835	0.38770	0.41565	0.43201	0.44276	0.45037	0.45604	0.46044	0.46394	0.46680	0.46917	0.47118	0.47289	0.47438	0.47568
	0.6	0.31353	0.37270	0.40065	0.41701	0.42776	0.43537	0.44104	0.44544	0.44894	0.45180	0.45417	0.45618	0.45789	0.45938	0.46068
		0.28936	0.34776	0.37566	0.39201	0.40276	0.41037	0.41604	0.42044	0.42394	0.42680	0.42917	0.43118	0.43289	0.43438	0.43568
	0.7	0.25662	0.31304	0.34070	0.35701	0.36776	0.37537	0.38104	0.38544	0.38894	0.39180	0.39417	0.39618	0.39789	0.39938	0.40068
		0.21651	0.26901	0.29590	0.31206	0.32277	0.33037	0.33605	0.34044	0.34394	0.34680	0.34917	0.35118	0.35289	0.35438	0.35568
	0.8	0.170667	0.21667	0.24171	0.25731	0.26785	0.27540	0.28105	0.28544	0.28894	0.29180	0.29417	0.29618	0.29789	0.29938	0.30068
		0.12140	0.15789	0.17932	0.19343	0.20334	0.21061	0.21615	0.22048	0.22396	0.22680	0.22917	0.23118	0.23289	0.23438	0.23568
	0.9	0.0720000	0.09613	0.11157	0.12251	0.13067	0.13696	0.14193	0.14594	0.14923	0.15196	0.15427	0.15624	0.15793	0.15940	0.16069
		0.02761	0.03791	0.04512	0.05068	0.05517	0.05889	0.06203	0.06472	0.06704	0.06907	0.07085	0.07243	0.07384	0.07509	0.07619
1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$S' = 2C_s r_1^2 r_2$$

Tabela A1.3 – Constante de momento de inércia da secção sombreada do alvéolo

C_I	m														
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
$x/2r$	0.02598	$0.1 \cdot 10^{-2}$	0.04249	0.04774	0.05198	0.05550	0.05848	0.06103	0.06324	0.06517	0.06687	0.06838	0.06972	0.07092	0.07200
	0.063638	0.085103	0.098914	0.10875	0.11613	0.12186	0.12641	0.13010	0.13313	0.13568	0.13783	0.13967	0.14126	0.14265	0.14387
	0.100675	0.131424	0.149749	0.16199	0.17069	0.17716	0.18214	0.18608	0.18926	0.19189	0.19409	0.19596	0.19757	0.19897	0.20020
	0.132712	0.169671	0.190363	0.203580	0.21270	0.21936	0.22441	0.22838	0.23158	0.23421	0.23642	0.23829	0.23990	0.24130	0.24253
	0.157963	0.198525	0.220241	0.233770	0.24299	0.24967	0.25474	0.25871	0.26191	0.26455	0.26675	0.26862	0.27024	0.27164	0.27286
	0.176071	0.218412	0.240481	0.254083	0.26332	0.27001	0.27507	0.27905	0.28225	0.28488	0.28709	0.28896	0.29057	0.29197	0.29320
	0.187597	0.230644	0.252800	0.266415	0.27565	0.28234	0.28741	0.29138	0.29458	0.29721	0.29942	0.30129	0.30290	0.30430	0.30553
	0.193715	0.236962	0.259133	0.272748	0.28199	0.28867	0.29374	0.29771	0.30091	0.30355	0.30575	0.30762	0.30924	0.31064	0.31186
	0.196017	0.239295	0.261466	0.275081	0.28432	0.29101	0.29607	0.30005	0.30325	0.30588	0.30809	0.30996	0.31157	0.31297	0.31420
	0.196350	0.239628	0.261799	0.275415	0.284653	0.291340	0.296407	0.300381	0.303581	0.306214	0.308419	0.310291	0.311902	0.313302	0.31453
	0.196682	0.239961	0.262133	0.275748	0.28499	0.29167	0.29674	0.30071	0.30391	0.30655	0.30875	0.31062	0.31224	0.31364	0.31486
	0.198984	0.242294	0.264466	0.278081	0.28732	0.29401	0.29907	0.30305	0.30625	0.30888	0.31109	0.31296	0.31457	0.31597	0.31720
	0.205102	0.248612	0.270798	0.284415	0.29365	0.30034	0.30541	0.30938	0.31258	0.31521	0.31742	0.31929	0.32090	0.32230	0.32353
	0.216628	0.260844	0.283118	0.296746	0.30599	0.31267	0.31774	0.32171	0.32491	0.32755	0.32975	0.33162	0.33324	0.33464	0.33586
	0.234736	0.280731	0.303357	0.31706	0.32631	0.33301	0.33807	0.34205	0.34525	0.34788	0.35009	0.35196	0.35357	0.35497	0.35620
0.8	0.259987	0.309585	0.333236	0.34725	0.35660	0.36332	0.36840	0.37238	0.37558	0.37821	0.38042	0.38229	0.38390	0.38530	0.38653
	0.29202	0.34783	0.37385	0.38884	0.39861	0.40551	0.41067	0.41468	0.41790	0.42054	0.42275	0.42462	0.42623	0.42764	0.42886
	0.32906	0.39415	0.42468	0.44208	0.45317	0.46082	0.46641	0.47067	0.47403	0.47675	0.47901	0.48091	0.48254	0.48395	0.48519
0.9	0.36672	0.4	0.48111	0.50309	0.51732	0.52718	0.53433	0.53973	0.54392	0.54725	0.54996	0.55220	0.55408	0.55568	0.55706
	0.392699	0.47926	0.52360	0.55083	0.56931	0.58268	0.59281	0.60076	0.60716	0.61243	0.61684	0.62058	0.62380	0.62660	0.62906

$$I' = 2C_I r_1^3 r_2$$